Esercizio 1. a) Sia $f \in End(\mathbb{C}^n)$. Dimostrare che f è diagonalizzabile se e solo se f^2 è diagonalizzabile e $Ker f = Ker f^2$.
b) Sia $f \in End(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che f^2 sia diagonalizzabile. Trovare una condizione necessaria e sufficiente perché f sia diagonalizzabile.
c) Trovare una condizione necessaria e sufficiente perché la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile (distinguere il caso reale e complesso).

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{x+y} dy.$$

Dopo aver verificato che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, trovare una funzione $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ esista finito non nullo.

Esercizio 3. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni, $f_n : [0,1] \to [0, \infty)$, misurabili. Posto $f(x) = \sup_n f_n(x)$, supponiamo che $\int_0^1 f^2(x)\, dx$ sia finito. Indichiamo inoltre con λ_n la misura di Lebesgue dell'insieme

$$\left\{ x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{n} \right\}$$

a) Supponiamo che $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. Mostrare che

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n^2(x)\, dx = \int_0^1 f^2(x)\, dx. \tag{1}$$

b) Se invece supponiamo

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

per ogni funzione continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, possiamo ancora dimostrare (1)?

Esercizio 4. Si consideri il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} &x'(t) = x(t) - |x(t)|^2 x(t), \quad t \geq 0 \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^d$, dove $|x(t)|$ indica la norma euclidea di $x(t)$. Chiamiamo energia della soluzione al tempo t la quantità $E(t) = |x(t)|^2$.

a) Mostrare che esiste una ed una sola soluzione globale.

b) Mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ c'è un tempo $T(x_0)$ tale che

$$E(t) \leq 2$$

per ogni $t \geq T(x_0)$.

c) Mostrare che si può scegliere il tempo $T(x_0)$ in modo che

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^d} T(x_0) < \infty.$$

Esercizio 5. Sia $\mathcal{P}_n$ l'insieme dei polinomi monici di grado n in $\mathbb{Z}[x]$ le cui radici complesse hanno modulo minore o uguale a 1.

a) Dimostrare che $\mathcal{P}_n$ è finito.

b) Sia P un polinomio monico in $\mathbb{Z}[x]$ le cui radici complesse hanno tutte modulo minore o uguale a 1. Dimostrare che, se $P(0) \neq 0$, tutte le radici di P sono radici dell'unità.

Esercizio 6. Sia p un numero primo, e A e B due matrici $n \times n$ a coefficienti interi.

a) Dimostrare che $Tr\ (A+B)^p \equiv Tr\ A^p + Tr\ B^p \pmod p$.

b) Dimostrare che $Tr\ A^p \equiv Tr\ A \pmod p$.

c) Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sia $\{u_n\}$ la successione data da $u_n = Tr\ A^n$. Confrontare questa successione con la successione $\{a_n\}$ definita da $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dalla relazione $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$. Dimostrare che, per ogni numero primo p, p divide a_p.

Esercizio 7. Si considerino

$$C = \{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\},$$

$$D = \{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-2)^2 + z^2 \leq 1\},$$

$$A = \{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Siano T_1 la superficie ottenuta ruotando C attorno all'asse delle z, $T_2 = T_1 \cup D$ e $T_3 = T_1 \cup A$.
a) Dimostrare che T_1, T_2 e T_3 sono compatti e connessi.
b) Calcolare il gruppo fondamentale di T_1, T_2 e T_3.
c) Dimostrare che T_1, T_2 e T_3 sono a due a due non omeomorfi.

Esercizio 8. Sia S una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ tale che per ogni punto $p \in S$ esiste una retta r_p passate per p tutta contenuta in S. Dimostrare che S ha curvatura di Gauss non positiva e che tutte le rette r_p sono curve geodetiche per S.

Esercizio 9. Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, con la stessa legge, a valori in $\{1, 2, 3\}$ (discrete, quindi). Calcolare la probabilità $P(X = Y)$ e trovare la legge di X che rende minima tale probabilità.

Esercizio 10. Sia P un punto di massa m, pesante, vincolato su una guida liscia, nel piano xy, di equazione $y = -(ax^2 + b)$, $a > 0$, $b > 0$. Supponiamo che il punto P sia collegato, tramite una molla di costante elastica k, ad un punto L che si muove lungo l'asse delle ascisse. Supponiamo che il congegno sia tale che la molla resti sempre verticale, quindi in modo che il segmento PL sia sempre parallelo all'asse delle ordinate.

a) Determinare l'energia potenziale del sistema delle forze attive.

b) Posto $\beta = \frac{mg}{k}$, determinare le posizioni di equilibrio e la loro natura al variare di β.

c) Descrivere i limiti di variazione di x durante il moto di condizioni iniziali $x(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\dot{x}(0) = 0$, nei seguenti due casi: i) $\beta = \frac{b}{2}$; ii) $\beta = 2b$.

Esercizio 1. a) Sia $f \in End(\mathbb{C}^n)$. Dimostrare che f è diagonalizzabile se e solo se f^2 è diagonalizzabile e $Ker f = Ker f^2$.
b) Sia $f \in End(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che f^2 sia diagonalizzabile. Trovare una condizione necessaria e sufficiente perché f sia diagonalizzabile.
c) Trovare una condizione necessaria e sufficiente perché la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile (distinguere il caso reale e complesso).

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

Dopo aver verificato che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, trovare una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ esista finito non nullo.

Esercizio 3. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni, $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, misurabili. Posto $f(x) = \sup_n f_n(x)$, supponiamo che $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ sia finito. Indichiamo inoltre con λ_n la misura di Lebesgue dell'insieme

$$\left\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$$

a) Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = \int_0^1 f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

b) Se invece supponiamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

per ogni funzione continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, possiamo ancora dimostrare (1)?

Esercizio 4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &x'(t) = -|x(t)|\, x(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}$$

$x(t) \in \mathbb{R}$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ assegnati. Chiamiamo energia della soluzione al tempo t la quantità $E(t) = |x(t)|^2$. Supponiamo f continua e limitata da uno:

$$\sup_{t \geq 0} |f(t)| \leq 1.$$

a) Mostrare che esiste una ed una sola soluzione globale.

b) Trovare una costate $C > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ c'è un tempo $T(x_0)$ tale che

$$E(t) \leq C$$

per ogni $t \geq T(x_0)$.

c) Se $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, vale $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$?

Esercizio 5. Sia p un numero primo e sia $P(x) = x^3 - x - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$. Chiamiamo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le radici (anche non distinte) di $P(x)$ in una estensione di $\mathbb{Z}_p$.

a) Mostrare che

$$[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)]^2 = -P(3)$$

b) Sia β una radice di $x^2 + P(3)$ in una estensione di $\mathbb{Z}_p$. Dimostrare che $\beta \in \mathbb{Z}_p$ se e solo se $P(x)$ non ha fattori irriducibili di grado due in $\mathbb{Z}_p[x]$.

Esercizio 6. Sia p un numero primo, e A e B due matrici $n \times n$ a coefficienti interi.

a) Dimostrare che $Tr\ (A+B)^p \equiv Tr\ A^p + Tr\ B^p \pmod p$.

b) Dimostrare che $Tr\ A^p \equiv Tr\ A \pmod p$.

c) Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sia $\{u_n\}$ la successione data da $u_n = Tr\ A^n$. Confrontare questa successione con la successione $\{a_n\}$ definita da $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dalla relazione $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$. Dimostrare che, per ogni numero primo p, p divide a_p.

Esercizio 7. Siano r_1,r_2,r_3 tre rette in $\mathbb{R}^3$ passanti per un punto p e siano

$$X_1 = \mathbb{R}^3 - r_1 \quad X_2 = \mathbb{R}^3 - (r_1 \cup r_2) \quad X_3 = \mathbb{R}^3 - (r_1 \cup r_2 \cup r_3)$$

a) Dimostrare che X_1, X_2 e X_3 sono connessi.
b) Calcolare il gruppo fondamentale di X_1, X_2 e X_3.
c) Dimostrare che X_1, X_2 e X_3 sono a due a due non omeomorfi.

Esercizio 8. Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathbb{C}^\infty$ tale che $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$ sia un compatto e $dF(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Sigma$. Per $x \in \Sigma$ sia $N(x) = \dfrac{gradF(x)}{||gradF(x)||}$. Se $\Psi : \Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è definita mediante $\Psi(x,t) = x + tN(x)$, dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che se $A = \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon)$ allora $B = \Psi(A)$ è un aperto e $\Psi_{|A} : A \to B$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 9. Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, con la stessa legge, a valori interi non negativi. Calcolare la probabilità $P(X = Y)$ e discutere se esista una legge di X che rende minima tale probabilità.

Esercizio 10. Sia P un punto di massa m, pesante, vincolato su una guida liscia, nel piano xy, di equazione $y = -(ax^2 + b)$, $a > 0$, $b > 0$. Supponiamo che il punto P sia collegato, tramite una molla di costante elastica k, ad un punto L che si muove lungo l'asse delle ascisse. Supponiamo che il congegno sia tale che la molla resti sempre verticale, quindi in modo che il segmento PL sia sempre parallelo all'asse delle ordinate.

a) Determinare l'energia potenziale del sistema delle forze attive.

b) Posto $\beta = \frac{mg}{k}$, determinare le posizioni di equilibrio e la loro natura al variare di β.

c) Descrivere i limiti di variazione di x durante il moto di condizioni iniziali $x(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\dot{x}(0) = 0$, nei seguenti due casi: i) $\beta = \frac{b}{2}$; ii) $\beta = 2b$.

Esercizio 1. Si consideri uno spazio vettoriale V di dimensione $n \geq 1$ e un insieme di vettori $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ *positivamente generatori*, ossia tali che, per ogni $v \in V$ esistono dei numeri reali positivi $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ tali che $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_m e_m$.
a) Dimostrare che $m \geq n+1$ e indicare come si può trovare un insieme di $n+1$ vettori positivamente generatori.
b) Supponiamo di conoscere un insieme M composto da m vettori positivamente generatori, con $m \geq 2n+1$. Dimostrare che esiste un sottoinsieme proprio di M che è ancora un insieme di vettori positivamente generatori. Si può affermare la stessa cosa se $m = 2n$?

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

Dopo aver verificato che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, trovare una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ esista finito non nullo.

Esercizio 3. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni, $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, misurabili. Posto $f(x) = \sup_n f_n(x)$, supponiamo che $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ sia finito. Indichiamo inoltre con λ_n la misura di Lebesgue dell'insieme

$$\left\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$$

a) Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = \int_0^1 f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

b) Se invece supponiamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

per ogni funzione continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, possiamo ancora dimostrare (1)?

Esercizio 4. Si consideri il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - |x(t)|^2 x(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^d$, dove $|x(t)|$ indica la norma euclidea di $x(t)$. Chiamiamo energia della soluzione al tempo t la quantità $E(t) = |x(t)|^2$.

a) Mostrare che esiste una ed una sola soluzione globale.

b) Mostrare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ c'è un tempo $T(x_0)$ tale che

$$E(t) \leq 2$$

per ogni $t \geq T(x_0)$.

c) Mostrare che si può scegliere il tempo $T(x_0)$ in modo che

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^d} T(x_0) < \infty.$$

Esercizio 5. Sia $P, Q)$ una coppia di polinomi a coefficienti reali.

a) Supponiamo che P e Q si spezzino in $\mathbb{R}[x]$ nel prodotto di fattori lineari distinti e che le loro radici siano *intercalate*, nel senso che se α e β sono due radici di uno dei polinomi, con $\alpha < \beta$, allora in (α, β) c'è almeno una radice dell'altro polinomio. Dimostrare che, per ogni $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, il polinomio $\lambda P + \mu Q$ si spezza in $\mathbb{R}[x]$ nel prodotto di fattori lineari distinti.

b) Dimostrare il viceversa, ossia che se, per ogni $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, il polinomio $\lambda P + \mu Q$ si spezza in $\mathbb{R}[x]$ nel prodotto di fattori lineari distinti, allora le radici di P e di Q sono intercalate.

Esercizio 6. Sia p un numero primo, e A e B due matrici $n \times n$ a coefficienti interi.

a) Dimostrare che $Tr\ (A+B)^p \equiv Tr\ A^p + Tr\ B^p \pmod p$.

b) Dimostrare che $Tr\ A^p \equiv Tr\ A \pmod p$.

c) Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sia $\{u_n\}$ la successione data da $u_n = Tr\ A^n$. Confrontare questa successione con la successione $\{a_n\}$ definita da $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, dalla relazione $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$. Dimostrare che, per ogni numero primo p, p divide a_p.

Esercizio 7. Sia G un sottogruppo non banale del gruppo additivo dei reali $\{\mathbb{R}, +\}$. Dimostrare che se G, con la topologia di sottospazio, è uno spazio topologico discreto, allora G è ciclico infinito.

Esercizio 8. Sia f una olomorfa in un aperto connesso Ω contenente il disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e si supponga che $|f(z)| = 1$ se $|z| = 1$.
a) Dimostrare che f trasforma Δ in sé.
b) Dimostrare che f si estende a una funzione meromorfa sulla sfera di Riemann.
c) Concludere che f è una funzione razionale.

Esercizio 9. Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, con la stessa legge, a valori interi non negativi. Calcolare la probabilità $P\,(X = Y)$ e discutere se esista una legge di X che rende minima tale probabilità.

Esercizio 10. Sia P un punto di massa m, pesante, vincolato su una guida liscia, nel piano xy, di equazione $y = -\left(ax^2 + b\right)$, $a > 0$, $b > 0$. Supponiamo che il punto P sia collegato, tramite una molla di costante elastica k, ad un punto L che si muove lungo l'asse delle ascisse. Supponiamo che il congegno sia tale che la molla resti sempre verticale, quindi in modo che il segmento PL sia sempre parallelo all'asse delle ordinate.

a) Determinare l'energia potenziale del sistema delle forze attive.

b) Posto $\beta = \frac{mg}{k}$, determinare le posizioni di equilibrio e la loro natura al variare di β.

c) Descrivere i limiti di variazione di x durante il moto di condizioni iniziali $x\,(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\dot{x}\,(0) = 0$, nei seguenti due casi: i) $\beta = \frac{b}{2}$; ii) $\beta = 2b$.