Testo 1

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Concavità/convessità di una funzione: risultati teorici ed applicazioni economiche.

2) Teoria della dualità nella programmazione lineare e non-lineare.

3) Dopo aver descritto la struttura per scadenza dei tassi di interesse, il candidato si soffermi sulle tecniche di ricostruzione della curva dei tassi a pronti.

4) Si presenti il problema di scelta del consumatore, indicando tra l'altro condizioni necessarie e condizioni sufficienti per individuare una soluzione a tale problema. Si descrivano inoltre la funzione di utilità indiretta (che è funzione del reddito del consumatore e dei prezzi dei beni) e le sue proprietà.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Si risolva per via geometrica ed in modo algoritmico il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & x_2 & & \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & & & \geq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

2) Dimostrare che l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di Programmazione Lineare con funzione obiettivo non nulla è un insieme convesso appartenente alla frontiera della regione ammissibile.

3) Sia $f : [a,b] \to \Re$ una funzione continua. Dimostrare che se $f([a,b]) = [a,b]$ allora $\exists x \in [a,b]$ tale che $f(x) = x$.

4) Si consideri il seguente problema di estremo vincolato:

$$P : \begin{cases} \max / \min \ f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y \\ x + y \leq 5, \ x \geq 1, \ y \geq 0 \end{cases}$$

Determinare tutti i punti che verificano le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker e che non sono né massimi né minimi relativi.

5) Si consideri un mercato concorrenziale nel quale la funzione di domanda aggregata è $q^d(p) = 32 - p$ per $p \in [0,32]$ e $q^d(p) = 0$ per $p > 32$. In questo mercato operano due imprese e la funzione di costo dell'impresa 1 è $C_1(q_1) = q_1 + \frac{1}{2}q_1^2$; la funzione di costo dell'impresa 2 è $C_2(q_2) = 3q_2 + \frac{1}{2}q_2^2$.

– (a) Si ricavi la funzione di offerta per ciascuna impresa. Si ricavi la funzione di offerta aggregata.

– (b) Si descriva l'equilibrio del mercato e il profitto di ciascuna delle due imprese.

Si supponga ora che le due imprese si fondano in un'unica impresa, che quindi diventa monopolista.

– (c) A partire dalle funzioni C_1 e C_2, si ricavi la funzione di costo dell'impresa monopolista. Si determini il prezzo che massimizza il profitto per l'impresa monopolista.

6) Si consideri un'economia di puro scambio con due beni, indicati con A e B, e due consumatori, indicati con 1 e 2. I consumatori hanno le seguenti dotazioni iniziali dei beni: $\omega_1^A = 6$, $\omega_1^B = 2$ e $\omega_2^A = 4$, $\omega_2^B = 8$. Le funzioni di utilità dei consumatori sono $U_1(x_1^A, x_1^B) = x_1^A x_1^B$ e $U_2(x_2^A, x_2^B) = \min\{x_2^A, x_2^B\}$, in cui x_i^j è la quantità che il consumatore i consuma del bene j.

– (a) Si determini l'unico equilibrio Walrasiano di questa economia e si dica se l'allocazione dei beni indotta dall'equilibrio è Pareto-efficiente.

– (b) Si determini l'insieme di tutte le allocazioni Pareto-efficienti.

– (c) Si indichi come si possono redistribuire le dotazioni iniziali in modo che l'economia abbia un equilibrio Walrasiano che induce l'allocazione $(x_1^A, x_1^B) = (7, 7)$, $(x_2^A, x_2^B) = (3, 3)$.

7) Un investitore ha una funzione di utilità u dalla ricchezza al tempo T di tipo esponenziale, con avversione al rischio $\gamma = 2$, ovvero

$$u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

Calcolare:

a- il certo equivalente C_X di una posizione finanziaria di payoff X al tempo T, supponendo che X sia distribuita normalmente con media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$.

b- il premio al rischio per X.

8) Siano B_1 e B_2 gli ZCB unitari (zero coupon bond con valore nominale pari ad 1) emessi in $t = 0$ con scadenze $t_1 = 0.5$ anni, $t_2 = 1$ anno e quotazioni rispettivamente $v(0; 0.5) = 0.99$, $v(0; 1) = 0.98$. Determinare:

a- il valore di non arbitraggio p in $t = 0$ di un coupon bond AA che ha appena staccato cedola, con valore nominale $F = 100$, cedole semestrali, scadenza un anno e TAN 3%.

b- una strategia di arbitraggio se AA viene quotato ad un prezzo di mercato p_M minore di p.

Testo 2

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Ottimizzazione vincolata: risultati teorici ed applicazioni economiche.

2) Soluzioni ottime di un problema di programmazione lineare: proprietà e loro eventuale determinazione.

3) Il candidato descriva la valutazione risk-neutral dei titoli derivati in mercati privi di arbitraggi, illustrandola con esempi in tempo discreto e in tempo continuo.

4) Si presenti la teoria dell'equilibrio economico generale per una economia di puro scambio, con particolare riferimento all'esistenza e ai due teoremi fondamentali dell'economia del benessere.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Determinare le soluzioni ottime ed il problema duale del seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \geq & -5 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & 0 & \leq & x_1 & \leq & 6 \\ & 0 & \leq & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

2) Sia data la seguente regione poliedrica:

$$D = \{(x_1, x_2) \in \Re^2 : \ 2x_1 - x_2 \geq 0, \ x_1 + x_2 \geq 2, x_1 - 2x_2 \leq 2, x_1 \geq 0\}$$

Determinare i valori di a e b tali per cui la funzione $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ ammette massimo assoluto in un vertice (x_1, x_2) della regione D tale che $x_1 \geq \frac{3}{2}$.

3) Sia $f : \Re \to \Re$ una funzione concava derivabile tale che $f'(1) > 0$. Calcolare il limite $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

4) Calcolare gli autovalori di una matrice $A \in \Re^{n \times n}$ idempotente (ovvero tale che $A^2 = A$).

5) Si consideri un individuo che vive nei periodi $t = 1, 2, 3$ e dispone della ricchezza 6 all'inizio del periodo uno; tale ricchezza è usata per finanziare i consumi nei tre periodi, indicati con $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ e $x_3 \geq 0$. Per semplicità si assume che la ricchezza non spesa in $t = 1$ e in $t = 2$ non produca interessi. Quindi x_1, x_2, x_3 devono rispettare il vincolo $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$. La funzione di utilità dell'individuo è $\ln(1+x_1) + \delta \ln(1+x_2) + \delta^2 \ln(1+x_3)$, in cui $\delta \in (0, 1]$ indica quanto per l'individuo il consumo futuro conta rispetto al consumo presente.

- (a) Si determinino i valori ottimi di x_1, x_2, x_3 per $\delta = 1$ e poi al variare di δ in $(0, 1)$. L'utilità per il consumatore di un piccolo aumento della sua ricchezza (da 6 a $6 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ e piccolo) è maggiore per valori di δ vicini a 1 o per valori di δ vicini a zero?

Si supponga ora che l'individuo non disponga di alcuna ricchezza iniziale ma guadagni 1 in $t = 1$, 3 in $t = 2$ e 2.2 in $t = 3$. In $t = 1$ e in $t = 2$ non è possibile contrarre prestiti per aumentare il consumo corrente, ma è possibile risparmiare per aumentare il consumo futuro, anche se su eventuali risparmi non maturano interessi. Dunque x_1, x_2, x_3 devono rispettare i vincoli $x_1 \leq 1$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6.2$.

- (b) Si determinino i valori ottimi di x_1, x_2, x_3 quando δ è uguale a 1. Si verifichi che l'utilità dell'individuo nel punto di massimo è minore dell'utilità nel punto di massimo trovato al punto (a) per $\delta = 1$, anche se la somma dei redditi $1 + 3 + 2.2$ è maggiore di 6. Si spieghi perche'.

6) Si consideri un'impresa per la quale la funzione di produzione dipende dalle quantità impiegate di due fattori ed è $Q(\mathbf{x}) = x_1 + 8\ln(1 + x_2)$, in cui $x_1 \geq 0$ ($x_2 \geq 0$) è la quantità impiegata del fattore uno (del fattore due). I prezzi unitari dei due fattori sono $w_1 = 2$ e $w_2 = 3$.

   - (a) Q esibisce rendimenti di scala crescenti? Q esibisce rendimenti di scala decrescenti? Q esibisce rendimenti di scala costanti? Si calcoli il saggio marginale di sostituzione tecnica per Q nel punto $(x_1, x_2) = (5, 2)$.
   - (b) Si risolva il problema di minimizzazione del costo al variare della quantità $q \in (0, +\infty)$ da produrre e si scriva la funzione di costo.

7) Nel modello di Black-Scholes, assumere che il tasso di interesse privo di rischio r sia del 2% annuo e che il titolo rischioso S sia correntemente quotato $S_0 = 10$ eur, con volatilità su base annua $\sigma = 20\%$. Supponendo che il titolo S non paghi dividendi, calcolare il prezzo di una opzione call at the money (ovvero, con strike $K = S_0$) e scadenza un anno.

8) Una impresa ha le due opportunità di investimento A e B di seguito riportate (t indica il tempo in anni e cf il relativo cashflow):

$$A = \begin{pmatrix} t & \text{cf} \\ 0 & -100 \\ 1 & +110 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t & \text{cf} \\ 0 & -150 \\ 1 & 85 \\ 2 & 85 \end{pmatrix}$$

   a- calcolare il VAN di A e di B col tasso annuo del 7%;

   b- calcolare il TIR di A e di B;

   c- spiegare come mai i due criteri di scelta, VAN e TIR, danno risultati contraddittori e come si fa a scegliere l'investimento migliore.

Testo 3

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Sistemi lineari: risultati teorici ed applicazioni economiche.

2) Problemi di programmazione lineare e loro applicazioni economiche.

3) L'analisi media-varianza come metodo per la selezione di portafoglio.

4) Si presenti il problema della minimizzazione del costo per un'impresa, indicando tra l'altro condizioni necessarie e condizioni sufficienti per individuare una soluzione a tale problema. Si descrivano inoltre la funzione di costo (che è funzione dei prezzi dei fattori e della quantità da produrre) e le sue proprietà.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Risolvere con il simplesso primale il seguente problema di Programmazione Lineare prestando opportuna attenzione alla degenerazione dei vincoli:

$$\begin{array}{rcccrr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & x_2 & \geq & -4 \\ & 0 & \leq & x_1 & \leq & 4 \\ & 0 & \leq & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

2) Sia data la seguente regione poliedrica:

$$D = \{(x_1, x_2) \in \Re^2 : \; 2x_1 - x_2 \geq 0, \; x_1 + x_2 \geq 2, x_1 - 2x_2 \leq 2, x_1 \geq 0\}$$

Determinare i valori di a tali per cui la funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + ax_2$ ammette infiniti punti di massimo assoluto rispetto alla regione D. Fornire le opportune motivazioni.

3) Sia $f : (a, b) \rightarrow \Re$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$$

Dimostrare che la funzione ha almeno un punto di minimo assoluto.

4) Siano $x \in \Re^n$, $x \neq 0$, ed $A \in \Re^{n \times n}$ tali che $(I - A^2)\, x = 0$. Calcolare $(-A^4 + A^3 + A^2 - A + I)\, x$.

5) Si consideri un'impresa per la quale la funzione di produzione dipende dalle quantità impiegate di due fattori ed è $Q(\mathbf{x}) = x_1^a x_2^{1/2}$, in cui a è un parametro positivo e $x_1 \geq 0$ ($x_2 \geq 0$) è la quantità impiegata del fattore uno (del fattore due).

- (a) Q esibisce rendimenti di scala crescenti? Q esibisce rendimenti di scala decrescenti? Q esibisce rendimenti di scala costanti? Si ricavi il saggio marginale di sostituzione tecnica per Q nel punto $(x_1, x_2) = (5, 2)$.

Si supponga che l'impresa venda il proprio prodotto in un mercato di concorrenza perfetta a un prezzo unitario pari a 4, e che i prezzi unitari dei due fattori siano $w_1 = 3$ e $w_2 = 3$. Il profitto dell'impresa in funzione di (x_1, x_2) è quindi $4Q(\mathbf{x}) - 3x_1 - 3x_2$.

- (b) Si determini (x_1, x_2) che massimizza il profitto dell'impresa al variare di a in $(0, +\infty)$.

6) Si consideri un consumatore la cui utilità dipende dalle quantità consumate di due beni, indicate con $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$; la funzione di utilità del consumatore è $u(\mathbf{x}) = x_1 + 4\sqrt{x_2}$. I prezzi unitari dei due beni sono $p_1 = 3$ e $p_2 = 2$, e il consumatore dispone di $R = 24$ euro da utilizzare per l'acquisto dei due beni.

- (a) Si risolva il problema di massimizzazione dell'utilità del consumatore con $p_1 = 3$, $p_2 = 2$ e $R = 24$.

Si supponga ora che il governo introduca un'imposta di 1 sul bene due, il cui prezzo diventa quindi pari a 3.

- (b) Si risolva il problema di massimizzazione dell'utilità del consumatore con $p_1 = 3$, $p_2 = 3$ e $R = 24$, e si calcoli l'entrata E che il governo ottiene grazie all'imposta sul bene due.

Si supponga ora che il governo, invece di introdurre l'imposta sul bene due, introduca un'imposta di E sul patrimonio del consumatore, il quale quindi si trova a disporre solo di $24 - E$ per acquistare i due beni.

- (c) Si risolva il problema di massimizzazione dell'utilità del consumatore con $p_1 = 3$, $p_2 = 2$ e $R = 24 - E$.
- (d) Si dica se il consumatore preferisce l'imposta sul bene due o l'imposta patrimoniale. Perche'?

7) Nel modello binomiale moltiplicativo per l'evoluzione di un attivo rischioso di Cox, Ross e Rubinstein, è noto che per evitare arbitraggi deve valere per i parametri del modello la relazione

$$b < m < a$$

dove b (positivo) indica il coefficiente di ribasso per il titolo rischioso, m il montante privo di rischio periodale ed a il coefficiente di rialzo per il titolo rischioso. Costruire un arbitraggio se $m \geq a$.

8) Un'assicurazione ben informata sa che il Tesoro ha appena emesso un buon numero di BTP decennali, con TAN del 3%. Il valore nominale di ciascun BTP è di 100 eur e il prezzo di emissione è $p = 98$ eur. L'assicurazione riesce a vendere subito una rendita decennale di 10000 eur, con rata semestrale costante di 150 eur e capitale rimborsabile a scadenza. Come può l'assicurazione coprirsi e far fronte ai pagamenti della rendita? Qual è il profitto che realizza dalla situazione del mercato?