MATEMATICA

Tema1

$$f(x,y) \;=\; \int_x^y e^{-|t|}\,dt\,.$$

Si dica se la funzione f ammette massimo e minimo sul piano.
Si calcolino il massimo e il minimo di f sull'insieme

$$C = \big\{(x,y) : \; x^2+y^2 \leqslant 1\big\}\,.$$

Esercizio 2. Si descrivano le soluzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 1.$$

Esercizio 3. Nel piano complesso $\mathbb{C}$ sia γ il bordo del disco di centro 0 e raggio 2, orientato in modo antiorario. Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{(z^2+1)^2}{z^5-1}\,dz.$$

Esercizio 4. Si definiscano i seguenti insiemi muniti della topologia indotta da $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} X &= \big\{z\in\mathbb{C} : \; |z|\leqslant 1,\; (|z|-1)\cdot(|\Re(z)|-|\Im(z)|)=0\big\},\\ Y &= \big\{z\in\mathbb{C} : \; |z|=1,\; \Im(z^4)\geqslant 0\big\}\cup\big\{z\in\mathbb{C} : \; |z|\leqslant 1,\; \Im(z^4)=0\big\}. \end{aligned}$$

- Si calcolino i gruppi fondamentali di X e di Y;
- Si dimostri che X e Y sono tra loro omotopicamente equivalenti;
- Si dimostri che X e Y non sono tra loro omeomorfi;
- Si risolvano nuovamente i tre punti precedenti sostituendo X con $X\times S^1$ e Y con $Y\times S^1$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Si ricordi che $f : V \to V$ lineare è detta *nilpotente* se esiste $k\in\mathbb{N}$ tale che $f^k=0$. Si dica che V ha la proprietà $(*)$ se vale il fatto seguente:

- esiste $\kappa \in \mathbb{N}$ tale che se $f : V \to V$ è lineare nilpotente allora $f^\kappa = 0$.

Si caratterizzino gli spazî V aventi la proprietà $(*)$. Se V è uno di essi si indichi con $\kappa(V)$ il minimo κ che rende vera la proprietà precedente e si calcoli $\kappa(V)$.

Esercizio 6. Sia A un anello graduato. Se I è un ideale di A si denoti con I^* l'ideale di A generato da tutti gli elementi omogenei di I. Si provi che se I è un ideale primo allora I^* è primo.

Esercizio 7. Siano $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ed X variabili aleatorie reali, $\left(F_n\right)_{n\geqslant 1}$ ed F le relative funzioni di ripartizione. Si provi che le seguenti due affermazioni sono equivalenti tra loro:

a) La successione $\left(X_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge a X in legge (in distribuzione);

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F_n(x) - F(x)\right| \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = 0\,.$

Esercizio 8. Si consideri il sistema di equazioni di Hamilton

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}(p,q) \qquad \dot q = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)$$

con hamiltoniana $H : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ data da

$$H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\alpha}{2}q^2 - q\sin q - \cos q$$

dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Si trovino i punti di equilibrio e se ne determini la stabilità al variare di α.

(ii) Si tracci nel piano (α, q) il diagramma di biforcazione degli equilibri.

TEMA 2

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \int_x^y e^{-|t|}\, dt\,.$$

Si dica se la funzione f ammette massimo e minimo sul piano.
Si calcolino il massimo e il minimo di f sull'insieme

$$C = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}\,.$$

Esercizio 2. Sia f una funzione misurabile definita su $\mathbb{R}$, sia χ_a la funzione caratteristica di $[a, a+1]$, sia $p \in [1, \infty]$ e si consideri la norma $\| \cdot \|_p$ di $L^p(\mathbb{R})$. Si dimostri che le seguenti due proprietà sono equivalenti tra loro:

a) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|f \cdot \chi_n\|_p < +\infty\,;$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \|f \cdot \chi_a\|_p \, da < +\infty\,.$

Esercizio 3. Per ogni $n \geqslant 1$ si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}\, dx.$$

Suggerimento: si impieghi la teoria dei residui di funzioni meromorfe.

Esercizio 4. Si definiscano i seguenti insiemi muniti della topologia indotta da $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} X &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant 1, \ (|z|-1)\cdot(|\Re(z)| - |\Im(z)|) = 0\}, \\ Y &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1, \ \Im(z^4) \geqslant 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant 1, \ \Im(z^4) = 0\}. \end{aligned}$$

- Si calcolino i gruppi fondamentali di X e di Y;
- Si dimostri che X e Y sono tra loro omotopicamente equivalenti;
- Si dimostri che X e Y non sono tra loro omeomorfi;

- Si risolvano nuovamente i tre punti precedenti sostituendo X con $X \times S^1$ e Y con $Y \times S^1$.

Esercizio 5. Sia $n \geqslant 2$ e sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ a coefficienti reali non negativi tali che $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Si indichi con $\rho(A)$ il raggio spettrale di A, ovvero il massimo dei moduli degli autovalori di A. Si dimostri che $\rho(A) = 1$ e che 1 è un autovalore di A. Si provi inoltre che se l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 1 allora $\lim_{k\to\infty} A^k$ esiste ed è una matrice di rango 1.

Esercizio 6. Sia A un dominio di integrità e sia $f \in A$ diverso da 0. Nel campo dei quozienti di A si consideri l'A-modulo A_f generato da $\{1/f^k : k \in \mathbb{N}\}$. Nell'anello $A[x]$ si consideri poi l'ideale F generato da $fx - 1$. Si provi che $A_f \cong A[x]/F$.

Esercizio 7. Siano $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ed X variabili aleatorie reali, $(F_n)_{n\geqslant 1}$ ed F le relative funzioni di ripartizione. Si provi che le seguenti due affermazioni sono equivalenti tra loro:

a) La successione $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge a X in legge (in distribuzione);

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F_n(x) - F(x)\right| e^{-x^2}\, dx = 0\,.$

Esercizio 8. Si consideri il moto centrale di una particella di massa unitaria in un campo di forze con energia potenziale $V(r) = -1/r^2$, dove r è la distanza dal centro di forza. Sia $c \neq \pm\sqrt{2}$ la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

(i) Si trovino i valori di c che permettono alla particella di raggiungere il centro di forza.

Sia $\bar{c}$ uno dei valori individuati al punto (i); sia inoltre $\bar{E} < 0$ un valore fissato dell'energia totale. Per tali valori del momento angolare e dell'energia:

(ii) Si determini la distanza massima $r_{\max}$ della particella dal centro di forza;

(iii) Si determini il tempo necessario alla particella per arrivare al centro partendo con $r = r_{\max}$.

TEMA 3

Esercizio 1. Si dica per quali numeri reali positivi α converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(x^\alpha\right)\, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 2. Si descrivano le soluzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = 1.$$

Esercizio 3. Per ogni $n \geqslant 1$ si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}\, \mathrm{d}x.$$

Suggerimento: si impieghi la teoria dei residui di funzioni meromorfe.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \ni (t,p) \mapsto \varphi_t(p) \in \mathbb{R}^3$ il flusso generato dal campo di vettori $v(x,y,z) = (1,-z,y)$. Sia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una curva semplice regolare contenuta nel piano $x = 0$. Si dimostri che la funzione

$$u : \mathbb{R}^2 \ni (s,t) \mapsto \varphi_t(\alpha(s)) \in \mathbb{R}^3$$

parametrizza una superficie regolare e si determini il corrispondente elemento d'area.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Si ricordi che $f : V \to V$ lineare è detta *nilpotente* se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $f^k = 0$. Si dica che V ha la proprietà $(*)$ se vale il fatto seguente:

- esiste $\kappa \in \mathbb{N}$ tale che se $f : V \to V$ è lineare nilpotente allora $f^\kappa = 0$.

Si caratterizzino gli spazî V aventi la proprietà $(*)$. Se V è uno di essi si indichi con $\kappa(V)$ il minimo κ che rende vera la proprietà precedente e si calcoli $\kappa(V)$.

Esercizio 6. Sia A un dominio di integrità e sia $f \in A$ diverso da 0. Nel campo dei quozienti di A si consideri l'A-modulo A_f generato da $\{1/f^k : k \in \mathbb{N}\}$. Nell'anello $A[x]$ si consideri poi l'ideale F generato da $f\,x - 1$. Si provi che $A_f \cong A[x]/F$.

Esercizio 7. Siano $(X_n)_{n\geqslant 1}$ e $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ due successioni di variabili aleatorie reali definite sul medesimo spazio di probabilità, convergenti in legge (in distribuzione) rispettivamente alle variabili aleatorie X e Y. Provare che non necessariamente $(X_n + Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge in legge a $(X + Y)$. Dimostrare tuttavia che se per ogni n fissato, X_n e Y_n sono indipendenti, e X ed Y sono indipendenti, allora $(X_n + Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge in legge a $(X + Y)$.

Esercizio 8. Si consideri il sistema di equazioni di Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p,q) \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)$$

con hamiltoniana $H : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ data da

$$H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\alpha}{2}q^2 - q\sin q - \cos q$$

dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Si trovino i punti di equilibrio e se ne determini la stabilità al variare di α.

(ii) Si tracci nel piano (α, q) il diagramma di biforcazione degli equilibri.