Matematica per le Decisioni Economiche

TEMA

Il candidato tratti uno dei temi seguenti, fornendo una esposizione generale dell'argomento prescelto, introducendo tutte le necessarie definizioni e presentando l'enunciato dei più importanti teoremi (di almeno uno dei quali deve essere data la dimostrazione). Si chiede inoltre che l'esposizione contenga espliciti riferimenti alle possibili applicazioni della teoria in oggetto in campo economico e finanziario.

1) Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie

2)) L'algoritmo del simplesso per la Programmazione Lineare: teoria e proprietà di convergenza.

3) Il criterio dell'utilità attesa come rappresentazione delle preferenze di un individuo ed il suo legame con il concetto di avversione al rischio ..

4) Efficienza e mercato

ESERCIZI

Il candidato svolga i soli 5 esercizi contrassegnati dal **numero 3** nell' elenco allegato

1.

Si consideri l'insieme N delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali $A = (a_{i,j})$ caratterizzate dalla condizione $a_{i,j} = \alpha_j$, $\forall j = 1,2,\ldots n$ (i.e. ciascuna riga è composta da termini tutti uguali).

(a) Si dimostri che l'insieme N costituisce un sottospazio vettoriale dello spazio M_n delle matrici quadrate di ordine n e se ne calcoli la dimensione

(b) Si determinino polinomio caratteristico e autovalori di una generica matrice $A \in N$

(c) Si dica se una generica matrice $A \in N$ è diagonalizzabile ed in caso affermativo si determini una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A

2.

Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}$$
$$a_0 = \alpha$$

dove $\alpha > 0$ e dove $k > 0$ è un parametro reale assegnato.

(a) Si determini il valore della condizione iniziale α in modo tale che la successione $\{a_n\}$ sopra definita sia stazionaria

(b) Nel caso $\alpha = 0$ si dica se la successione $\{a_n\}$ è convergente o divergente e qualora si verifichi la prima delle due alternative se ne calcoli il limite

(c) Si utilizzino i risultati delle domande precedenti per calcolare il valore del numero

$$\sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k + \ldots}}}}$$

3. Sia f una funzione continua definita su tutta la retta reale.

(a) Sia I un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e sia $f(I) = I$. Si provi che esiste almeno un punto $a \in I$ tale che $f(a) = a$

(b) Siano I e J due intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ e sia $I \subset J$ con $I \neq J$. Si provi che qualora sia soddisfatta la $f(I) = J$ esiste almeno un punto $a \in I$ tale che $f(a) = a$.

(c) Si dica se le condizioni di chiusura e limitatezza postulate per l'intervallo I sono essenziali o meno alla validità delle affermazioni (a) e (b) precedenti

1.

Sia f una funzione derivabile in tutto un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Siano a e b due punti di I e valga la condizione $f'(a).f'(b) < 0$

(a) Si provi che esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ in cui $f'(c) = 0$

(b) Si utilizzi il risultato precedente per mostrare che se f è derivabile in tutto un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, allora la sua funzione derivata f' non può ammettere discontinuità di tipo "salto"

2.

Si dice nilpotente una matrice quadrata A di ordine n che soddisfa la condizione

$A^k = 0$ per un qualche $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$

(a) Si dica, giustificando la risposta, se l'insieme delle matrici nilpotenti di ordine n costituisce un sottospazio dello spazio M_n delle matrici quadrate di ordine n

(b) Si dica, giustificando la risposta, se l'insieme delle matrici nilpotenti di ordine n è "chiuso" rispetto alla operazione di prodotto tra matrici definita in M_n

(c) Si determinino tutti gli autovalori di una generica matrice nilpotente di ordine n

(d) Si determinino, se esistono, le matrici di ordine n nilpotenti e diagonalizzabili

(e) Si provi che se A è nilpotente di ordine n , allora il minimo numero naturale k per cui vale la $A^k = 0$ soddisfa la condizione $k \leq n$

3.

Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\alpha^n}$$

(a) Se ne determini il carattere al variare del parametro positivo α

(b) Si calcoli la somma della serie precedente nel caso particolare $\alpha = 2$

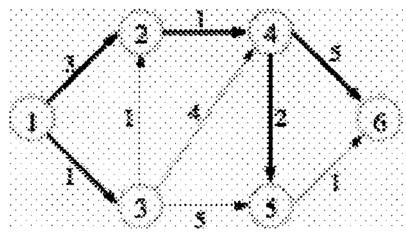
(c) Si calcoli la somma $S(\alpha)$ della serie precedente nel caso di un generico $\alpha > 1$

(d) Con la notazione introdotta al punto (c) si determinino

$$\inf_{\alpha > 1} S(\alpha) \quad \text{e} \quad \sup_{\alpha > 1} S(\alpha)$$

Esercizi Ricerca Operativa:

1) Dato il grafo $G = (N, A)$ in figura, si verifichi se l'albero T evidenziato è un albero dei cammini minimi di radice 1. Successivamente, si modifichino i costi degli archi (3,2) e (5,6) ponendo $c_{32} = c_{56} = \alpha$, e si determini per quali valori del parametro α l'albero T è un albero dei cammini minimi di radice 1. Giustificare le risposte.



2) Si consideri il seguente problema di *PL*:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & -x_1 & -x_2 & -x_3 & & \\
 & x_1 & & +x_3 & \leq & 1 \\
 & & x_2 & -x_3 & \geq & -1 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

Si determinino tutti i vertici del poliedro corrispondente alla regione ammissibile del problema, giustificando algebricamente la risposta (suggerimento: utilizzando le trasformazioni equivalenti lo si riscriva nella forma $\max \{ \ cx \ : \ Ax \leq b \ \}$).

3) Si consideri la seguente famiglia di problemi di *PL*:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & (-\varepsilon)x_1 & +(2-\varepsilon)x_2 & & \\
 & 2x_1 & + \quad x_2 & \leq & -1 \\
 & & \qquad x_2 & \leq & -2 \\
 & -x_1 & + \quad x_2 & \leq & 2 \\
 & & \qquad x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & & \leq & 0
\end{array}
$$

parametrica nel valore ε. Si disegni la funzione valore del problema al variare di $\varepsilon \in \Re$ (suggerimento: per $\varepsilon = 0$ la base ottima è $B = \{ \ 1, 2 \ \}$. Si giustifichino le risposte fornite.

Esercizio 1
Data l'operazione finanziaria di investimento

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = (-1000, 400, 400, 400)/(0, 1, 2, 3),$$

dove gli importi sono espressi in Euro e i tempi in anni, dire perché il Tasso Interno di Rendimento (TIR) esiste ed è unico. Ricavare, con il metodo di bisezione, un'approssimazione del TIR esatta fino alla terza cifra decimale.

Esercizio 2
Un giocatore ha preferenze descritte dal criterio dell'utilità attesa con utilità esponenziale $u(x) = -\exp(-\gamma x)$, dove $\gamma > 0$ è il coefficiente di avversione al rischio. Un gioco a premi consiste nel lanciare 4 monete (perfettamente simmetriche) e nel vincere 1 Euro se escono almeno 2 teste e perderne 1 altrimenti. Determinare per quali valori di γ il giocatore accetta di giocare (senza alcun pagamento o premio iniziale). Senza rifare i conti, che cosa cambia se il numero minimo di teste per vincere 1 euro è portato a 3 ?

Esercizio 3
Si indichi con $m(t, s)$ il montante in t di 1 Euro investito in $s \leq t$ e con

$$\delta(t, s) := \frac{1}{m(t, s)} \frac{\partial m}{\partial t}(t, s)$$

la relativa intensità istantanea di interesse. Si ricorda che $(t, s) \mapsto m(t, s)$ è una legge finanziaria se $m(t, t) = 1$ e se è strettamente crescente nella prima variabile.
Dire per quali valori $a, b, c \in \mathbb{R}$ esiste una legge finanziaria $m(t, s)$ la cui intensità istantanea di interesse è $\delta(t, s) = at + bs + c$. Determinare poi i valori di a, b e c tali che 2000 Euro investiti tra 6 mesi, secondo tale legge, diventano 2130 Euro tra 18 mesi.

Esercizio 1.
Si consideri un individuo la cui ricchezza è uguale a

$$\begin{array}{lll} W-d & \text{con probabilità} & \pi \\ W & \text{con probabilità} & 1-\pi, \end{array}$$

dove $\pi \in (0,1)$, $W > 0$ e $d > 0$, e W e' il valore della ricchezza "iniziale" e d il valore di un danno associato a un sinistro. Una compagnia di assicurazione offre un contratto con le seguenti caratteristiche: l'assicurato paga un premio p in ogni stato e riceve d se si verifica l'incidente. Assumiamo che il consumatore possa acquistare una quantita' a di tale contratto, con $a \in \mathbb{R}$ - a e' "la domanda di assicurazione". In tal caso il consumatore paga un premio $(a \cdot p)$ in ogni stato e riceve un risarcimento pari ad $(a \cdot d)$ se si verifica l'incidente. Dunque se l'assicurato compra una quantita' a del contratto ottiene una ricchezza pari a

$$\begin{array}{lll} W-d-ap+ad & \text{con probabilità} & \pi \\ W-ap & \text{con probabilità} & 1-\pi. \end{array}$$

#

Data $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : c \to u(c)$ tale che $\forall c \in \mathbb{R}$, $u'(c) > 0$ e $u''(c) < 0$, l'individuo risolve il seguente problema. Per dati π, W, d, p

$$\max_{a\in\mathbb{R}} \ \pi u(W-d+a(d-p)) + (1-\pi)u(W-ap) \quad \text{s.t..} \quad \begin{array}{l} a \geq 0 \\ \\ a \leq 1 \end{array}$$

1. Si discuta il problema.
2. Nel caso in cui la soluzione del problema sia interna a $[0,1]$, si dica qual e' l'effetto di una variazione di π (probabilita' del sinistro) sulla domanda di assicurazione a.

Esercizio 2.
Si consideri una economia di puro scambio con n consumatori indicati da $i \in \{1,\ldots,n\} \equiv \mathcal{N}$, ognuno dei quali e' descritto da un vettore $e_i \in \mathbb{R}^k$ di dotazioni iniziali e da una funzione di utilita' $u_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, x_i \mapsto u_i(x_i)$. Sia $p \in \mathbb{R}^k$ un vettore di prezzi. 1a. Si scriva il problema di massimo del consumatore; 1b.assumendo esistenza e unicita' della soluzione di tale problema, si dia la definizione di equilibrio competitivo per il modello considerato.

Sia data una struttura di coalizioni dell'insieme dei consumatori, cioe', una partizione $\mathcal{P}$ di $\mathcal{N}$ con elementi tutti non vuoti. 2. Si dia la definizione di equilibrio competitivo nel caso in cui $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ dove $\mathcal{P}_1$ e' un arbitrario sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{N}$ e $\mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{N} \backslash \mathcal{P}_1$. Si assuma che la dotazione iniziale di ciascuna coalizione e' la somma delle dotazioni iniziali dei componenti la coalizione e che la funzione di utilita' di ciascuna coalizione $\mathcal{P}_j$ e' una arbitraria $u_{\mathcal{P}_j} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$, con proprieta' tali da garantire esistenza e unicita' della soluzione del problema di massimo.(Si tralasci il problema di come la scelta di consumo di una coalizione viene distribuita tra i componenti la coalizione).

Esercizio 3.
Si discuta il seguente problema di massimizzazione del profitto: per dati $a \in (0,1), p, p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{++}$

$$\max_{(y,x_1,x_2)\in\mathbb{R}^3_{++}} py - (p_1x_1 + p_2x_2) \quad s.t. \quad y \leq x_1^a \cdot x_2^{1-a}$$

Si assuma che la soluzione esiste.