Allegato B

# Prova scritta di ammissione al Dottorato in matematica

Pisa, 6 novembre 2006

Tema 1

Il candidato risolva almeno tre dei seguenti esercizi:

**Esercizio 1.** Sia $A$ una matrice reale di ordine $n$, triangolare superiore e tale che gli elementi sulla diagonale di $A$ sono tutti $= 1$. Dimostrare che se esiste un intero $p$ tale che $A^p = I$, allora $A = I$.

**Esercizio 2.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$. Mostrare che la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definita da

$$a_n := f(1) - f(0) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

è infinitesima.

**Esercizio 3.** Siano $(x, y, z)$ le coordinate di $\mathbb{R}^3$ e sia $\sigma\colon [0, l] \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare di classe $C^\infty$ chiusa semplice, contenuta nel piano $z = 0$. Sia $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ il versore normale a $\sigma$ e sia $\mathbf{b} := (0, 0, 1)$. Dato $r > 0$, sia $\varphi\colon [0, l] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(s, x) = \sigma(s) + r\big(\mathbf{n}(s)\cos x + \mathbf{b}\sin x\big).$$

1. Dimostrare che se $r$ è abbastanza piccolo allora $\varphi$ ha rango 2 ovunque.
2. Dimostrare che se $r$ è abbastanza piccolo allora l'immagine di $\varphi$ è una superficie regolare $T$, detta *tubo* attorno a $\sigma$ di raggio $r$.



/ - P. AB

3. Sia $R$ la regione di $T$ costituita dai punti di curvatura Gaussiana $K$ non negativa. Dimostrare che
$$\int_R K\, d\nu = 2 \int_0^l |\kappa(s)|\, ds,$$
dove $\kappa$ è la curvatura di $\sigma$, e $d\nu$ è l'usuale misura d'area sulla superficie. L'integrale a secondo membro è detto *curvatura totale* di $\sigma$.

**Esercizio 4.** Sia $X$ uno spazio topologico tale che esiste un rivestimento $S^2 \times S^1 \to X$ di grado 2. Dimostrare che:

1. $X$ è una varietà topologica compatta;
2. non esiste un rivestimento $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to X$;
3. non esiste un rivestimento $X \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

**Esercizio 5.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ e siano $f, g \colon V \to V$ due endomorfismi tali che:
i) $f + g$ è un isomorfismo;
ii) $f \circ g = 0$.
Dimostrare che $f + tg$ è un isomorfismo per ogni $t \in \mathbb{K}^*$.

**Esercizio 6.** Sia $A_5$ il gruppo delle permutazioni pari su 5 elementi. Determinare la struttura del gruppo degli automorfismi di $A_5$.

**Esercizio 7.** Si consideri la successione di v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ definita per ricorrenza da
$$X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n + B_n, \quad X_0 = 1$$
dove $(B_n)_{n\geq 0}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti di Bernoulli di parametro $p$ (nel senso che $P(B_n = 1) = p$, $P(B_n = 0) = 1 - p$). Mostrare che, con probabilità uno, la successione è limitata. Mostrare che
$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 0.$$



AB

**Esercizio 8.** Sia $u(t,x,y)$, $(x,y)$ nel disco $D \subset \mathbb{R}^2$ di centro zero e raggio 1, il campo di velocità, che supponiamo di classe $C^2$, di un fluido piano incomprimibile: vale $\partial_x u_1 + \partial_y u_2 = 0$, $u$ è tangente alla circonferenza sul bordo di $D$, ed il campo $g(t,x,y)$ definito da

$$g_1 = \partial_t u_1 + (u_1 \partial_x + u_2 \partial_y)\, u_1$$
$$g_2 = \partial_t u_2 + (u_1 \partial_x + u_2 \partial_y)\, u_2$$

ha la forma $g = \nabla p$ per una funzione $p(t,x,y)$ che supponiamo anch'essa di classe $C^2$. Sia $\omega(t,x,y)$ il relativo campo di vorticità:

$$\omega = \partial_x u_2 - \partial_y u_1.$$

Dimostrare che la grandezza

$$I_\varphi(t) := \int\int_D \varphi\left(\omega(t,x,y)\right) dxdy$$

risulta indipendente dal tempo, per ogni funzione $\varphi$ di classe $C^1$.

**Esercizio 9.** Per $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

**Esercizio 10.** Supponiamo che un sistema possa trovarsi in $N$ stati diversi $s_1, ..., s_N$ e che ad ogni stato $s$ si possa associare una "energia" $H(s)$ del sistema ($H(s) \in \mathbb{R}$). Si consideri l'insieme $\Lambda$ di tutte le misure di massa unitaria sugli stati $s_i$, cioè le sequenze $\rho_1, ..., \rho_N$ di numeri non negativi tali che $\sum_{i=1}^N \rho_i = 1$. Mostrare che

$$\rho_i^H := C \exp\left(H(s_i)\right), \quad C^{-1} := \sum_{i=1}^N \exp\left(H(s_i)\right)$$

è l'elemento di $\Lambda$ che minimizza il funzionale $F$ su $\Lambda$ definito da

$$F(\rho_1, ..., \rho_N) = \sum_{i=1}^N \rho_i \left(\log \rho_i - H(s_i)\right).$$

Posto $E := \sum_{i=1}^N \rho_i^H H(s_i)$, mostrare che esso minimizza anche il funzionale $\Phi(\rho_1, ..., \rho_N) = \sum_{i=1}^N \rho_i \log \rho_i$ tra tutti gli elementi di $\Lambda$ tali che $\sum_{i=1}^N \rho_i H(s_i) = E$.

Allegato B

# Prova scritta di ammissione al Dottorato in matematica

Pisa, 6 novembre 2006

Tema 2

Il candidato risolva almeno tre dei seguenti esercizi:

**Esercizio 1.** Sia $A$ una matrice simmetrica reale di ordine $n$, definita positiva. Dimostrare che se esiste un intero $p$ tale che $A^p = I$, allora $A = I$.

**Esercizio 2.** Costruire una successione di funzioni continue $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ che converge puntualmente ad una funzione $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ma tale che $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ non converge a $\int_0^1 f(x)\,dx$.

**Esercizio 3.** Siano $(x, y, z)$ le coordinate di $\mathbb{R}^3$ e sia $\sigma\colon [0,l] \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare di classe $C^\infty$ chiusa semplice, contenuta nel piano $z = 0$. Sia $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ il versore normale a $\sigma$ e sia $\mathbf{b} := (0,0,1)$. Dato $r > 0$, sia $\varphi\colon [0,l] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(s,x) = \sigma(s) + r\big(\mathbf{n}(s)\cos x + \mathbf{b}\sin x\big).$$

1. Dimostrare che se $r$ è abbastanza piccolo allora $\varphi$ ha rango 2 ovunque.
2. Dimostrare che se $r$ è abbastanza piccolo allora l'immagine di $\varphi$ è una superficie regolare $T$, detta *tubo* attorno a $\sigma$ di raggio $r$.
3. Sia $R$ la regione di $T$ costituita dai punti di curvatura Gaussiana $K$ non negativa. Dimostrare che

$$\int_R K\,d\nu = 2\int_0^l |\kappa(s)|\,ds,$$

dove $\kappa$ è la curvatura di $\sigma$, e $d\nu$ è l'usuale misura d'area sulla superficie. L'integrale a secondo membro è detto *curvatura totale* di $\sigma$.



A - P - AB

**Esercizio 4.** Sia $X$ uno spazio topologico tale che esiste un rivestimento $S^2 \times S^1 \to X$ di grado 2. Dimostrare che:

1. $X$ è una varietà topologica compatta;
2. non esiste un rivestimento $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to X$;
3. non esiste un rivestimento $X \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

**Esercizio 5.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ e siano $f, g \colon V \to V$ due endomorfismi tali che:
i) $f + g$ è un isomorfismo;
ii) $f \circ g = 0$.
Dimostrare che $f + tg$ è un isomorfismo per ogni $t \in \mathbb{K}^*$.

**Esercizio 6.** Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^5 - 405x + 3$.

**Esercizio 7.** Si consideri la successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\geq 0}$ definita per ricorrenza da

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n + B_n, \quad X_0 = 1$$

dove $(B_n)_{n\geq 0}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti di Bernoulli di parametro $p$ (nel senso che $P(B_n = 1) = p$, $P(B_n = 0) = 1-p$). Mostrare che, con probabilità 1, la successione è limitata. Mostrare che

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 0.$$

**Esercizio 8.** Si consideri la funzione $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$H(p,q) = p^2 + q^2 + arctg\left(p^2 + q^2\right).$$

Si dimostri che ogni soluzione del sistema

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\partial_q H - \varepsilon p \\ \dot{q} &= \partial_p H - \varepsilon q \end{aligned}$$



AB

con $\varepsilon > 0$ ha la proprietà

$$\lim_{t \to +\infty} (p(t), q(t)) = 0.$$

Mostrare inoltre che questo è falso nel caso $\varepsilon = 0$.

**Esercizio 9.** Per $x \in \mathbb{R}$, calcolare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

**Esercizio 10.** Supponiamo che un sistema possa trovarsi in $N$ stati diversi $s_1, ..., s_N$ e che ad ogni stato $s$ si possa associare una "energia" $H(s)$ del sistema ($H(s) \in \mathbb{R}$). Si consideri l'insieme $\Lambda$ di tutte le misure di massa unitaria sugli stati $s_i$, cioè le sequenze $\rho_1, ..., \rho_N$ di numeri non negativi tali che $\sum_{i=1}^{N} \rho_i = 1$. Mostrare che

$$\rho_i^H := C \exp\left(H(s_i)\right), \quad C^{-1} := \sum_{i=1}^{N} \exp\left(H(s_i)\right)$$

è l'elemento di $\Lambda$ che minimizza il funzionale $F$ su $\Lambda$ definito da

$$F(\rho_1, ..., \rho_N) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left(\log \rho_i - H(s_i)\right).$$

Posto $E := \sum_{i=1}^{N} \rho_i^H H(s_i)$, mostrare che esso minimizza anche il funzionale $\Phi(\rho_1, ..., \rho_N) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \log \rho_i$ tra tutti gli elementi di $\Lambda$ tali che $\sum_{i=1}^{N} \rho_i H(s_i) = E$.



1 – 9. AB

Allegato B

# Prova scritta di ammissione al Dottorato in matematica

Pisa, 6 novembre 2006

Tema 3

Il candidato risolva almeno tre dei seguenti esercizi:

**Esercizio 1.** Sia $A$ una matrice simmetrica reale di ordine $n$, definita positiva. Dimostrare che se esiste un intero $p$ tale che $A^p = I$, allora $A = I$.

**Esercizio 2.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$. Mostrare che la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definita da

$$a_n := f(1) - f(0) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

è infinitesima.

**Esercizio 3.** Siano $(x, y, z)$ le coordinate di $\mathbb{R}^3$ e sia $\sigma\colon [0, l] \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare di classe $C^\infty$ chiusa semplice, contenuta nel piano $z = 0$. Sia $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ il versore normale a $\sigma$ e sia $\mathbf{b} := (0, 0, 1)$. Dato $r > 0$, sia $\varphi\colon [0, l] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(s, x) = \sigma(s) + r\big(\mathbf{n}(s)\cos x + \mathbf{b}\sin x\big).$$

1. Dimostrare che se $r$ è abbastanza piccolo allora $\varphi$ ha rango 2 ovunque.
2. Dimostrare che se $r$ è abbastanza piccolo allora l'immagine di $\varphi$ è una superficie regolare $T$, detta *tubo* attorno a $\sigma$ di raggio $r$.



n. p. AB

3. Sia $R$ la regione di $T$ costituita dai punti di curvatura Gaussiana $K$ non negativa. Dimostrare che

$$\int_R K\, d\nu = 2\int_0^l |\kappa(s)|\, ds,$$

dove $\kappa$ è la curvatura di $\sigma$, e $d\nu$ è l'usuale misura d'area sulla superficie. L'integrale a secondo membro è detto *curvatura totale* di $\sigma$.

**Esercizio 4.** Sia $Q \subset \mathbb{R}^3$ una quadrica non vuota, non degenere e a centro (ricordiamo che $Q$ si dice a centro se è definita da un polinomio $f(x, y, z)$ di secondo grado la cui parte omogenea di grado 2 è una forma quadratica non degenere su $\mathbb{R}^3$). Dimostrare che esiste $0 \leq p \leq 2$ tale che $Q$ è omeomorfa a $S^p \times \mathbb{R}^{2-p}$.

**Esercizio 5.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ e siano $f, g \colon V \to V$ due endomorfismi tali che:

i) $f + g$ è un isomorfismo;

ii) $f \circ g = 0$.

Dimostrare che $f^k + g^k$ è un isomorfismo per ogni intero $k \geq 1$.

**Esercizio 6.** Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^5 - 405x + 3$.

**Esercizio 7.** Si consideri la successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\geq 0}$ definita per ricorrenza da

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n + B_n, \quad X_0 = 1$$

dove $(B_n)_{n\geq 0}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti di Bernoulli di parametro $p$ (nel senso che $P(B_n = 1) = p$, $P(B_n = 0) = 1 - p$). Mostrare che, con probabilità 1, la successione è limitata. Mostrare che

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 0.$$

**Esercizio 8.** Si consideri la funzione $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$H(p, q) = p^2 + q^2 + arctg\,(p^2 + q^2).$$



N. r. AB 97

Si dimostri che ogni soluzione del sistema

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\partial_q H - \varepsilon p \\ \dot{q} &= \partial_p H - \varepsilon q \end{aligned}$$

con $\varepsilon > 0$ ha la proprietà

$$\lim_{t \to +\infty} (p(t), q(t)) = 0.$$

Mostrare inoltre che questo è falso nel caso $\varepsilon = 0$.

**Esercizio 9.** Per $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

**Esercizio 10.** Supponiamo che un sistema possa trovarsi in $N$ stati diversi $s_1, \ldots, s_N$ e che ad ogni stato $s$ si possa associare una "energia" $H(s)$ del sistema ($H(s) \in \mathbb{R}$). Si consideri l'insieme $\Lambda$ di tutte le misure di massa unitaria sugli stati $s_i$, cioè le sequenze $\rho_1, \ldots, \rho_N$ di numeri non negativi tali che $\sum_{i=1}^{N} \rho_i = 1$. Mostrare che

$$\rho_i^H := C \exp\left(H(s_i)\right), \quad C^{-1} := \sum_{i=1}^{N} \exp\left(H(s_i)\right)$$

è l'elemento di $\Lambda$ che minimizza il funzionale $F$ su $\Lambda$ definito da

$$F(\rho_1, \ldots, \rho_N) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left(\log \rho_i - H(s_i)\right).$$

Posto $E := \sum_{i=1}^{N} \rho_i^H H(s_i)$, mostrare che esso minimizza anche il funzionale $\Phi(\rho_1, \ldots, \rho_N) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \log \rho_i$ tra tutti gli elementi di $\Lambda$ tali che $\sum_{i=1}^{N} \rho_i H(s_i) = E$.