Testo 1

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Funzioni concave e concave generalizzate: proprietà teoriche ed applicazioni ai problemi economici.

2) Si discuta il principio di assenza di opportunità di arbitraggio nei mercati finanziari.

3) Il candidato discuta la teoria della dualità nell’ambito della Programmazione Lineare, fornendo esemplificazioni di carattere economico.

4) Si discuta il modello di Utilità Attesa in riferimento alle scelte in condizioni di incertezza.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

\[
\begin{align*}
\text{max } & \quad x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t. } & \quad -x_1 - x_2 \leq -4 \\
& \quad x_1 \leq 4 \\
& \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\
& \quad x_2 \leq 4
\end{align*}
\]

- a) Si risolva il problema per via geometrica.
- b) Si scriva il duale del problema dato.
- c) Si determini l’insieme delle soluzioni ottime del problema duale, giustificando la risposta.

2) Sia data la coppia di problemi di Programmazione Lineare \( (P) : \max \{ cx : Ax \leq b \} \) e \( (D) : \min \{ y^T : yA = c, y \geq 0 \} \). Siano \( (P) \) e \( (D) \) non vuoti. Data \( \bar{x} \) soluzione ammissibile di \( (P) \) e \( \bar{y} \) soluzione ammissibile di \( (D) \), si dimostri che \( \bar{z} \) e \( \bar{y} \) sono soluzioni ottime, rispettivamente per \( (P) \) e \( (D) \), se e solo se \( \bar{y} (b - A\bar{x}) = 0 \).

3) Sia \( f : [0,1] \to [1,2] \) una funzione continua. Dimostrare che esiste un punto \( c \in [0,1] \) tale che \( f(c) = c + 1 \).

4) Sia \( A \in \mathbb{R}^{n \times n} \) e sia \( x \in \mathbb{R}^n \) un autovettore di \( A \) corrispondente al suo autovalore \( \lambda = 2 \). Dire per quali valori del parametro reale \( k \) risulta:

\[
(A^4 - 4A^3 + 7A^2 - 8A + kI)x = 0
\]
5) Si consideri un consumatore con le seguenti preferenze:

\[ U = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \]

Si calcolino:

i. le curve di domanda dei due beni quando \( M \) è il reddito del consumatore e \( p_1 \) e \( p_2 \) sono i prezzi dei due beni;

ii. si calcoli l’elasticità della domanda del bene 1 al proprio prezzo e si discuta se il bene è ordinario o di Giffen;

iii. si calcoli l’elasticità incrociata della domanda del bene 1 rispetto al bene 2 e si discuta se i beni sono sostituti o complementi;

iv. si calcoli l’elasticità della domanda del bene 1 al reddito e si discuta se il bene 1 sia un bene normale, di lusso od inferiore.

6) Si consideri il seguente modello di Solow:

\[ \dot{k} = sk^\alpha - (n + \delta)k, \]

dove \( s > 0 \) è il saggio di risparmio, \( k \) è il capitale pro-capite, \( n > 0 \) il tasso di crescita della popolazione e \( \delta > 0 \) il tasso di deprezzamento.

i. Si definisca sotto quali condizioni sui parametri il modello ammette gli equilibri;

ii. si determinino e si studino le caratteristiche degli equilibri quando \( \alpha \in (0, 1) \);

iii. si assuma che \( \alpha \in (0, 1) \); si discutano gli effetti sull’equilibrio con capitale positivo di una diminuzione di \( s \).

7) Per comprare un motorino che costa 4000 euro vengono proposti due piani alternativi di finanziamento:

a) Rimborso con due rate annue costanti posticipate al tasso del 7%;

b) Rimborso con una rata di 3000 euro dopo 1 anno e una di 1000 euro dopo due anni e un pagamento di 200 euro da versare immediatamente come spese di istruttoria per il finanziamento.

Si determini quale delle due proposte è la più conveniente.

8) Dimostrare che un ammortamento americano si riduce ad un ammortamento francese nel caso in cui il tasso di remunerazione coincida con il tasso di accumulazione.
Testo 2

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Problemi di estremo vincolato: risultati teorici ed applicazioni ai problemi economici.

2) Si discutano i principali criteri di scelta degli investimenti.

3) Il candidato descriva i principali problemi di flusso su rete, illustrando le relative proprietà ed evidenziando il legame di tali problemi con la Programmazione Lineare.

4) Si discuta il modello di monopolio naturale e il possibile intervento di regolamentazione dello Stato in tale ambito.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

\[
\begin{align*}
\text{max} & \quad x_1 + x_2 \\
& -2x_1 - x_2 \leq -4 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_2 \leq 4
\end{align*}
\]

- a) Si risolva il problema per via geometrica. La soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.
- b) Si scriva il duale del problema dato.
- c) Si determini l’insieme delle soluzioni ottime del problema duale, giustificando la risposta.

2) Si forniscano esempi di problemi di Programmazione Lineare, della forma \((P): \text{max}\{cx : Ax \leq b\}\), tali che:

- a) \((P)\) ammette un’unica soluzione ottime, corrispondente ad una soluzione di base non degenere;
- b) \((P)\) ammette un’unica soluzione ottime, corrispondente ad una soluzione di base degenere;
- c) \((P)\) ammette soluzioni ottime alternative;
- d) \((P)\) è superiormente non limitato.

3) Sia \(f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\) una funzione derivabile. Dimostrare che se \(f(a) > 0\) ed \(f(b) < 0\), con \(a < b\), allora esiste un punto \(c \in ]a, b[\) tale che \(f(c) = 0\) ed \(f'(c) \leq 0\).
4) Discutere al variare del parametro reale \( k \) l'esistenza ed unicità delle soluzioni del sistema lineare \( Ax = b \) dove:

\[
A = \begin{bmatrix}
    k & 1 & k \\
    1 & k & 1 \\
    1 & 2k & (2k-1)
\end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix}
    3k \\
    k + 2 \\
    4
\end{bmatrix}
\]

Determinare la soluzione nel caso in cui essa sia unica.

5) Si consideri un consumatore con le seguenti preferenze:

\[ U = x_1 + \log x_2 \]

Si calcolino:

i. le curve di domanda dei due beni quando \( M \) è il reddito del consumatore e \( p_1 \) e \( p_2 \) sono i prezzi dei due beni;

ii. si calcoli l'elasticità della domanda dei bene 1 al proprio prezzo e si discuta se il bene è ordinario o di Giffen;

iii. si calcoli l'elasticità incrociata della domanda del bene 1 rispetto al bene 2 e si discuta se gli beni sono sostituiti o complementari;

iv. si calcoli l'elasticità della domanda del bene 1 al reddito e si discuta se il bene 1 sia un bene normale, di lusso od inferiore.

6) Si consideri il seguente modello di Solow:

\[ k = sk^\alpha - (n + \delta)k \]

dove \( s > 0 \) è il saggio di risparmio, \( k \) è il capitale pro-capite, \( n > 0 \) il tasso di crescita della popolazione e \( \delta > 0 \) il tasso di deprezzamento.

i. Si definisca sotto quali condizioni sui parametri il modello ammette degli equilibri;

ii. si determinino e si studino le caratteristiche degli equilibri quando \( \alpha > 1 \);

iii. si assuma che \( \alpha > 1 \); si discutano gli effetti sull'equilibrio con capitale positivo di una diminuzione di \( n \).

7) Si rediga il piano di ammortamento in 4 anni con metodo francese di un debito di 15000 euro al tasso del 3%, sapendo che dopo il pagamento della seconda rata il tasso diviene del 5%.

8) Dimostrare che una legge di capitalizzazione è scindibile se e solo se la sua forza di interesse è costante.
Testo 3

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Autovalori ed autovettori di una matrice: proprietà teoriche ed applicazioni ai problemi economici.

2) Si discuta il problema della immunizzazione finanziaria.

3) Il candidato descriva un algoritmo del Simplex per la Programmazione Lineare, discutendo le relative proprietà di correttezza e di terminazione.

4) Dopo aver definito i concetti di ottimo pareiano e di equilibrio di Nash, si discuta con l’aiuto di un esempio la non corrispondenza fra l’ottimo pareiano e l’equilibrio di Nash in giochi non cooperativi a scelte simultanee.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

\[
\begin{align*}
\text{max} & \quad -2x_1 + 6x_2 \\
& \quad -9x_1 + x_2 \leq 26 \\
& \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& \quad x_2 \geq -1
\end{align*}
\]

- a) Si risolva il problema per via geometrica.
- b) Si risolva il problema mediante l’algoritmo dei Simplex, previa eventuale sua riformulazione.
- c) Si fornisca il duale del problema dato.

2) Si formulino esempi di problemi di Programmazione Lineare, della forma \( (P) : \max \{cz : Ax \leq b \} \), tali che:

- a) sia \((P)\) che il suo duale ammettono una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base non degenere;
- b) \((P)\) ammette una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base non degenere, mentre il suo duale ammette una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base degenere;
- c) \((P)\) ammette una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base degenere, mentre il suo duale ammette una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base non degenere;
d) sia \( (P) \) che il suo duale ammettono una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base degene.

3) Sia \( f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \) una funzione continua tale che

\[
\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty
\]

Dimostrare che la funzione ha almeno un punto di massimo assoluto.

4) Sia \( x > 1 \). Dopo aver dimostrato le seguenti disuguaglianze:

\[
\left( 1 - \frac{1}{x} \right) < \log(x) < (x - 1)
\]

verificare che \( \log(1.2) \in \left[ \frac{5}{6}, \frac{11}{10} \right] \).

5) Si consideri un consumatore con le seguenti preferenze:

\[
U = \min(x_1, x_2)
\]

Si calcolino:

i. le curve di domanda dei due beni quando \( M \) è il reddito del consumatore e \( p_1 \) e \( p_2 \) sono i prezzi dei due beni;

ii. si calcoli l’elasticità della domanda del bene 1 al proprio prezzo e si discuta se il bene è ordinario o di Giffen;

iii. si calcoli l’elasticità incrociata della domanda del bene 1 rispetto al bene 2 e si discuta se i beni sono sostituiti o complementi;

iv. si calcoli l’elasticità della domanda del bene 1 al reddito e si discuta se il bene 1 sia un bene normale, di lusso odi inferiore.

6) Si consideri un consumatore che deve decidere quanto consumare e quanto riposare avendo la seguente funzione di utilità

\[
U = c^\alpha R^{1-\alpha},
\]

dove \( c \) è il consumo e \( R \) il riposo. Egli dispone di un totale di \( T \) ore nella giornata, riceve un salario \( w \) per ora lavorata e il prezzo del bene di consumo è \( p \).

i. Si mostri i vincoli del problema del consumatore indicando con \( L \) il totale delle ore lavorate;

ii. si calcoli il consumo, il riposo e le ore lavorate nell’ottimo;

iii. si calcoli elasticità della domanda del bene di consumo al prezzo \( p \).

iv. si calcoli l’elasticità dell’offerta di lavoro al salario.

7) Si vuol costituire, in regime di capitalizzazione composta, un capitale di 100000 euro con rate annuali di 4000 euro costanti, anticipate, differite di 3 anni. Determinare il numero di rate necessarie per costituire il capitale nel caso in cui il tasso annuo sia dei 5%.

8) Dimostrare che in un ammortamento francese le quote capitali crescono in progressione geometrica di ragione \( (1 + i) \).