ALLEGATO B

Esame di Ammissione al Corso di Dottorato in Matematica per le Decisioni Economiche
Scuola di Dottorato "L. Fibonacci" - Anno 2007
Prova scritta del 8 Novembre 2006

Testo 1

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Funzioni concave e concave generalizzate: proprietà teoriche ed applicazioni ai problemi economici.

2) Si discuta il principio di assenza di opportunità di arbitraggio nei mercati finanziari.

3) Il candidato discuta la teoria della dualità nell'ambito della Programmazione Lineare, fornendo esemplificazioni di carattere economico.

4) Si discuta il modello di Utilitá Attesa in riferimento alle scelte in condizioni di incertezza.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\
 & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$

   - a) Si risolva il problema per via geometrica.
   - b) Si scriva il duale del problema dato.
   - c) Si determini l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale, giustificando la risposta.

2) Sia data la coppia di problemi di Programmazione Lineare $(P) : max\{cx : Ax \leq b\}$ e $(D) : min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$. Siano (P) e (D) non vuoti. Data $\tilde{x}$ soluzione ammissibile di (P) e $\tilde{y}$ soluzione ammissibile di (D), si dimostri che $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ sono soluzioni ottime, rispettivamente per (P) e (D), se e solo se $\tilde{y}(b - A\tilde{x}) = 0$.

3) Sia $f : [0,1] \to [1,2]$ una funzione continua. Dimostrare che esiste un punto $c \in [0,1]$ tale che $f(c) = c + 1$.

4) Sia $A \in \Re^{n \times n}$ e sia $x \in \Re^n$ un autovettore di A corrispondente al suo autovalore $\lambda = 2$. Dire per quali valori del parametro reale k risulta:

$$(A^4 - 4A^3 + 7A^2 - 8A + kI)x = 0$$

5) Si consideri un consumatore con le seguenti preferenze:

$$U = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

Si calcolino:

i. le curve di domanda dei due beni quando M é il reddito del consumatore e p_1 e p_2 sono i prezzi dei due beni;

ii. si calcoli l'elasticitá della domanda del bene 1 al proprio prezzo e si discuta se il bene é ordinario o di Giffen;

iii. si calcoli l'elasticitá incrociata della domanda del bene 1 rispetto al bene 2 e si discuta se i beni sono sostituti o complementi;

iv. si calcoli l'elasticitá della domanda del bene 1 al reddito e si discuta se il bene 1 sia un bene normale, di lusso od inferiore.

6) Si consideri il seguente modello di Solow:

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n + \delta) k,$$

dove $s > 0$ é il saggio di risparmio, k é il capitale pro-capite, $n > 0$ il tasso di crescita della popolazione e $\delta > 0$ il tasso di deprezzamento.

i. Si definisca sotto quali condizioni sui parametri il modello ammette degli equilibri;

ii. si determinino e si studino le caratteristiche degli equilibri quando $\alpha \in (0, 1)$;

iii. si assuma che $\alpha \in (0, 1)$; si discutano gli effetti sull'equilibrio con capitale positivo di una diminuzione di s.

7) Per comprare un motorino che costa 4000 euro vengono proposti due piani alternativi di finanziamento:

a) Rimborso con due rate annue costanti posticipate al tasso del 7%;

b) Rimborso con una rata di 3000 euro dopo 1 anno e una di 1000 euro dopo due anni e un pagamento di 200 euro da versare immediatamente come spese di istruttoria per il finanziamento.

Si determini quale delle due proposte è la più conveniente.

8) Dimostrare che un ammortamento americano si riduce ad un ammortamento francese nel caso in cui il tasso di remunerazione coincida con il tasso di accumulazione.

Esame di Ammissione al Corso di Dottorato in
Matematica per le Decisioni Economiche
Scuola di Dottorato "L. Fibonacci" - Anno 2007
Prova scritta del 8 Novembre 2006

Testo 2

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Problemi di estremo vincolato: risultati teorici ed applicazioni ai problemi economici.
2) Si discutano i principali criteri di scelta degli investimenti.
3) Il candidato descriva i principali problemi di flusso su rete, illustrando le relative proprietà ed evidenziando il legame di tali problemi con la Programmazione Lineare.
4) Si discuta il modello di monopolio naturale e il possibile intervento di regolamentazione dello Stato in tale ambito.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & -2x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

   – a) Si risolva il problema per via geometrica. La soluzione ottima è unica? Giustificare la risposta.
   – b) Si scriva il duale del problema dato.
   – c) Si determini l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale, giustificando la risposta.

2) Si forniscano esempi di problemi di Programmazione Lineare, della forma $(P) : max\{cx : Ax \leq b\}$, tali che:

   – a) (P) ammette un'unica soluzione ottima, corrispondente ad una soluzione di base non degenere;
   – b) (P) ammette un'unica soluzione ottima, corrispondente ad una soluzione di base degenere;
   – c) (P) ammette soluzioni ottime alternative;
   – d) (P) è superiormente non limitato.

3) Sia $f : \Re \to \Re$ una funzione derivabile. Dimostrare che se $f(a) > 0$ ed $f(b) < 0$, con $a < b$, allora esiste un punto $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$ ed $f'(c) \leq 0$.

4) Discutere al variare del parametro reale k l'esistenza ed unicità delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$ dove:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 2k & (2k-1) \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 3k \\ k+2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Determinare la soluzione nel caso in cui essa sia unica.

5) Si consideri un consumatore con le seguenti preferenze:

$$U = x_1 + log x_2$$

Si calcolino:

i. le curve di domanda dei due beni quando M é il reddito del consumatore e p_1 e p_2 sono i prezzi dei due beni;

ii. si calcoli l'elasticitá della domanda del bene 1 al proprio prezzo e si discuta se il bene é ordinario o di Giffen;

iii. si calcoli l'elasticitá incrociata della domanda del bene 1 rispetto al bene 2 e si discuta se i beni sono sostituti o complementi;

iv. si calcoli l'elasticitá della domanda del bene 1 al reddito e si discuta se il bene 1 sia un bene normale, di lusso od inferiore.

6) Si consideri il seguente modello di Solow:

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n + \delta) k,$$

dove $s > 0$ é il saggio di risparmio, k é il capitale pro-capite, $n > 0$ il tasso di crescita della popolazione e $\delta > 0$ il tasso di deprezzamento.

i.Si definisca sotto quali condizioni sui parametri il modello ammette degli equilibri;

ii. si determinino e si studino le caratteristiche degli equilibri quando $\alpha > 1$;

iii. si assuma che $\alpha > 1$; si discutano gli effetti sull'equilibrio con capitale positivo di una diminuzione di n.

7) Si rediga il piano di ammortamento in 4 anni con metodo francese di un debito di 15000 euro al tasso del 3%, sapendo che dopo il pagamento della seconda rata il tasso diviene del 5%.

8) Dimostrare che una legge di capitalizzazione è scindibile se e solo se la sua forza di interesse è costante.

Esame di Ammissione al Corso di Dottorato in Matematica per le Decisioni Economiche
Scuola di Dottorato "L. Fibonacci" - Anno 2007
Prova scritta del 8 Novembre 2006

Testo 3

Temi. Il Candidato svolga uno dei seguenti quattro temi a sua scelta:

1) Autovalori ed autovettori di una matrice: proprietà teoriche ed applicazioni ai problemi economici.

2) Si discuta il problema della immunizzazione finanziaria.

3) Il candidato descriva un algoritmo del Simplesso per la Programmazione Lineare, discutendo le relative proprietà di correttezza e di terminazione.

4) Dopo aver definito i concetti di ottimo paretiano e di equilibrio di Nash, si discuta con l'aiuto di un esempio la non corrispondenza fra l'ottimo paretiano e l'equilibrio di Nash in giochi non cooperativi a scelte simultanee.

Esercizi. Il Candidato svolga i seguenti esercizi:

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -2x_1 & + & 6x_2 & & \\ & -9x_1 & + & x_2 & \leq & 26 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ & & & x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

   - a) Si risolva il problema per via geometrica.
   - b) Si risolva il problema mediante l'algoritmo del Simplesso, previa eventuale sua riformulazione.
   - c) Si fornisca il duale del problema dato.

2) Si forniscano esempi di problemi di Programmazione Lineare, della forma $(P) : max\{cx : Ax \leq b\}$, tali che:

   - a) sia (P) che il suo duale ammettono una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base non degenere;
   - b) (P) ammette una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base non degenere, mentre il suo duale ammette una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base degenere;
   - c) (P) ammette una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base degenere, mentre il suo duale ammette una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base non degenere;

– d) sia (P) che il suo duale ammettono una soluzione ottima corrispondente ad una soluzione di base degenere.

3) Sia $f : \Re \rightarrow \Re$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Dimostrare che la funzione ha almeno un punto di massimo assoluto.

4) Sia $x > 1$. Dopo aver dimostrato le seguenti disuguaglianze:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) < log(x) < (x - 1)$$

verificare che $log(1.2) \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right[$.

5) Si consideri un consumatore con le seguenti preferenze:

$$U = min\,(x_1, x_2)$$

Si calcolino:

i. le curve di domanda dei due beni quando M é il reddito del consumatore e p_1 e p_2 sono i prezzi dei due beni;

ii. si calcoli l'elasticitá della domanda del bene 1 al proprio prezzo e si discuta se il bene é ordinario o di Giffen;

iii. si calcoli l'elasticitá incrociata della domanda del bene 1 rispetto al bene 2 e si discuta se i beni sono sostituti o complementi;

iv. si calcoli l'elasticitá della domanda del bene 1 al reddito e si discuta se il bene 1 sia un bene normale, di lusso od inferiore.

6) Si consideri un consumatore che deve decidere quanto consumare e quanto riposare avendo la seguente funzioni di utilitá

$$U = c^{\alpha} R^{1-\alpha},$$

dove c é il consumo e R il riposo. Egli dispone di un totale di T ore nella giornata, riceve un salario w per ora lavorata e il prezzo del bene di consumo é p.

i. Si mostri i vincoli del problema del consumatore indicando con L il totale delle ore lavorate;

ii. si calcoli il consumo, il riposo e le ore lavorate nell'ottimo;

iii. si calcoli elasticitá della domanda del bene di consumo al prezzo p.

iv. si calcoli l'elasticitá dell'offerta di lavoro al salario.

7) Si vuol costituire, in regime di capitalizzazione composta, un capitale di 100000 euro con rate annuali di 4000 euro costanti, anticipate, differite di 3 anni. Determinare il numero di rate necessarie per costituire il capitale nel caso in cui il tasso annuo sia del 5%.

8) Dimostrare che in un ammortamento francese le quote capitali crescono in progressione geometrica di ragione $(1 + i)$.