Università di Pisa

Concorso di ammissione al tirocinio formativo attivo
classe A047 - matematica

Prova scritta - 29 agosto 2012

Esercizio 1 Un robot si trova nell'origine $(0,0)$ di un piano cartesiano e comincia a camminare. Ad ogni passo egli aumenta di 1 l'ascissa o l'ordinata: in altre parole, quando il robot si trova nella posizione (a,b), al passo successivo può andare nella posizione $(a+1,b)$ oppure nella posizione $(a,b+1)$.

(i) Con quanti diversi percorsi il robot può raggiungere la posizione $(6,6)$?

(ii) Con quanti diversi percorsi il robot può raggiungere la posizione $(6,6)$, senza passare per la posizione $(3,3)$?

(iii) Con quanti diversi percorsi il robot può raggiungere la posizione $(6,6)$, senza passare né per la posizione $(3,3)$ né per la $(5,4)$?

Esercizio 2 Sia ABC un triangolo acutangolo. Si costruisca sul lato BC il triangolo equilatero $A'BC$ scegliendo A' dalla parte opposta di A rispetto alla retta passante per BC. Sia P l'intersezione tra il segmento AA' e la circonferenza circoscritta al triangolo $A'BC$.

(i) Verificare che gli angoli $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ e $\widehat{APC}$ sono uguali.

(ii) Provare che
$$\overline{AA'} = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}.$$

(iii) Dimostrare che P coincide con l'intersezione dei segmenti BB' e CC', ove i punti B' e C' sono costruiti in modo analogo ad A' a partire dagli altri due lati del triangolo.

Esercizio 3 Per ogni poligono P denotiamo con $\sigma(P)$ la regione del piano composta da tutti i punti esterni a P la cui distanza da P è inferiore a 1. Sia T un triangolo con i lati di lunghezze 4, 5 e 7.

(i) Calcolare l'area della regione $\sigma(T)$.

(ii) Esibire un poligono Q, di perimetro pari a 16, tale che la regione $\sigma(Q)$ abbia area inferiore all'area di $\sigma(T)$.

(iii) Detto $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i poligoni di perimetro uguale a 16, dimostrare che
$$\inf_{P\in\mathcal{P}} \text{area}(\sigma(P)) = \pi.$$

Esercizio 4 Sia $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto.

(i) Si scrivano le definizioni di asintoto obliquo e di asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ relativi alla funzione f.

(ii) Dimostrare, oppure confutare con esempi, le seguenti affermazioni:

(a) Se
$$\text{esiste } m \in \mathbb{R} \text{ tale che } \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = m, \tag{1}$$
allora f ha un asintoto obliquo od orizzontale per $x \to +\infty$.

(b) Se f ha un asintoto obliquo od orizzontale per $x \to +\infty$, allora vale la condizione (1).

(c) Se f è convessa e vale la condizione (1), allora f ha un asintoto obliquo od orizzontale per $x \to +\infty$.

(d) Se f' ha limite $+\infty$, oppure $-\infty$, per $x \to +\infty$, allora f non ha alcun asintoto per $x \to +\infty$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Tutti i percorsi dall'origine a $(6,6)$ sono $\binom{12}{6} = 924$: infatti si tratta di sequenze di 12 passi complessivi, 6 in orizzontale e 6 in verticale, e per individuarne uno basta per esempio scegliere quali sono, tra i 12 totali, i 6 passi in verticale; si tratta dunque di determinare tutti i sottoinsiemi di 6 elementi contenuti in un insieme di 12.

(ii) Calcoliamo dapprima il numero dei percorsi da $(0,0)$ a $(6,6)$, che *passano* dal punto $(3,3)$: essi sono in numero di $\binom{6}{3}^2 = 400$. Infatti, la scelta del percorso da $(3,3)$ a $(6,6)$ è indipendente dalla scelta del percorso da $(0,0)$ a $(3,3)$; quindi il totale dei percorsi da $(0,0)$ a $(6,6)$ è dato dal numero di percorsi fra $(0,0)$ e $(3,3)$, moltiplicato per il numero di percorsi fra $(3,3)$ e $(6,6)$. I modi di arrivare a $(3,3)$ sono $\binom{6}{3} = 20$, mentre i modi di andare da $(3,3)$ a $(6,6)$ sono tanti quanti quelli di andare da $(0,0)$ a $(3,3)$, ossia ancora $\binom{6}{3} = 20$.
Dato che a noi interessa il numero dei percorsi che *non passano* da $(3,3)$, tenendo conto di (i) otteniamo, per passaggio al complementare, che essi sono in numero di

$$924 - 400 = 524.$$

(iii) Tutti i percorsi da $(0,0)$ a $(6,6)$, che *passano* dal punto $(5,4)$ sono $\binom{9}{5} \cdot \binom{3}{2} = 378$. Infatti, come si è fatto in (ii), il totale di tali percorsi è dato dal numero di percorsi fra $(0,0)$ e $(5,4)$, che – analogamente a quanto detto in (i) – è $\binom{9}{5} = 126$, moltiplicato per il numero di percorsi fra $(5,4)$ e $(6,6)$, il quale coincide col numero di percorsi fra $(0,0)$ e $(1,2)$, ovvero $\binom{3}{2} = 3$. Dunque si va da $(0,0)$ a $(6,6)$, passando da $(5,4)$, in $3 \cdot 126 = 378$ modi. I percorsi da $(0,0)$ a $(6,6)$, che *passano* sia da $(3,3)$ che da $(5,4)$, sono allora il prodotto dei percorsi da $(0,0)$ a $(3,3)$, per quelli da $(3,3)$ a $(5,4)$, per quelli da $(5,4)$ a $(6,6)$, cioè $20 \cdot 3 \cdot 3 = 180$. Per il principio di inclusione-esclusione, il totale dei percorsi da $(0,0)$ a $(6,6)$ che *non passano* né da $(3,3)$ né da $(5,4)$ è dato dal totale dei percorsi da $(0,0)$ a $(6,6)$, *meno* quelli che passano da $(3,3)$, *meno* quelli che passano da $(5,4)$, *più* quelli che passano sia da $(3,3)$ che da $(5,4)$: dunque il numero cercato è

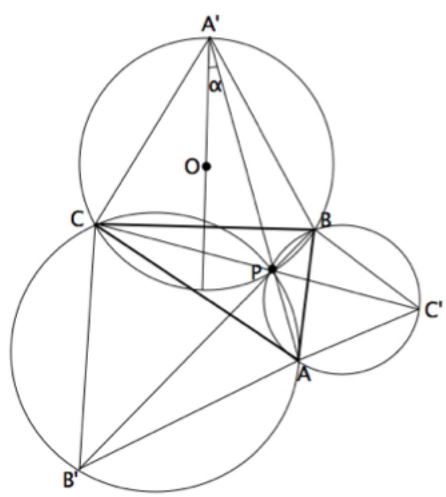
$$924 - 400 - 378 + 180 = 326.$$

Esercizio 2 (i) Per le proprietà degli angoli alla circonferenza si ha

$$\widehat{BPA'} = \widehat{BCA'} = 60°,$$
$$\widehat{CPA'} = \widehat{CBA'} = 60°.$$

Possiamo quindi concludere facilmente che, come richiesto,

$$\begin{aligned}\widehat{BPC} &= \widehat{BPA'} + \widehat{CPA'} = 120°,\\ \widehat{APB} &= 180° - \widehat{BPA'} = 120°,\\ \widehat{APC} &= 180° - \widehat{CPA'} = 120°.\end{aligned}$$



Le considerazioni che abbiamo fatto ci permettono anche di osservare che il problema è ben posto, nel senso che effettivamente il segmento AA' incontra l'arco di cerchio $\widehat{CB}$.
Infatti i punti A per i quali il segmento AA' non incontra l'arco $\widehat{CB}$ dovrebbero o trovarsi all'interno del cerchio stesso, ma allora l'angolo $\widehat{CAB}$ sarebbe maggiore di 120°, e il triangolo ABC non sarebbe acutangolo, oppure dovrebbero trovarsi fuori dal settore individuato dall'angolo $\widehat{CA'B}$, ma in tal caso o l'angolo in C o l'angolo in B sarebbe maggiore di 120°. In effetti l'ipotesi "giusta" per garantire la

buona positura del problema sarebbe richiedere che il triangolo ABC non abbia nessun angolo maggiore o uguale a $120°$.

(ii) Indichiamo con O il centro della circonferenza per CBA', con r il raggio di tale circonferenza e con α l'angolo $\widehat{OA'P}$. Ricordiamo che la lunghezza di una corda con angolo γ alla circonferenza è data da $2r\sin\gamma$; dunque, essendo $\widehat{OA'B} = \widehat{OA'C} = 30°$, si ha:

$$\begin{aligned}\overline{PB} + \overline{PC} &= 2r\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + 2r\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \\ &= r\cos\alpha - r\sqrt{3}\sin\alpha + r\cos\alpha + r\sqrt{3}\sin\alpha = 2r\cos\alpha\end{aligned}$$

ma anche

$$\overline{PA'} = 2r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2r\cos\alpha$$

da cui $\overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PA'}$ e quindi la tesi.
In alternativa, poiché il quadrilatero $PBA'C$ è inscritto in una circonferenza, si può utilizzare il teorema di Tolomeo, in virtù del quale risulta

$$\overline{PB} \cdot \overline{CA'} + \overline{PC} \cdot \overline{BA'} = \overline{PA'} \cdot \overline{CB};$$

ma essendo $\overline{CA'} = \overline{BA'} = \overline{CB}$, si ottiene

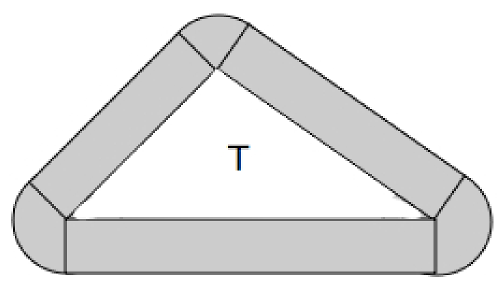
$$\overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PA'},$$

da cui segue immediatamente la tesi.

(iii) Abbiamo già osservato che l'angolo $\widehat{APC}$ è pari a $120°$. Questo ci permette di concludere che P si trova sull'arco $\overset{\frown}{AC}$ della circonferenza ACB'. Dunque analogamente a quanto visto in (i) possiamo affermare che l'angolo $\widehat{B'PC}$ è di $60°$ e pure l'angolo $\widehat{B'PA}$ è di $60°$. Di conseguenza l'angolo $\widehat{B'PB}$ è di $180°$ e pertanto il punto P si trova sul segmento BB'.
In modo del tutto analogo si ottiene che P appartiene al segmento CC'.

Esercizio 3 (i) L'insieme $\sigma(T)$ è composto dall'unione di tre regioni rettangolari di altezza 1 e basi sui lati del triangolo, e di tre settori circolari di raggio 1, centrati nei vertici del triangolo e di ampiezza pari all'angolo "esterno" al triangolo (ricordiamo che l'angolo esterno di un poligono è l'angolo supplementare all'angolo interno). La somma delle aree dei tre rettangoli risulta pari al perimetro del triangolo T moltiplicato per 1 e cioè pari a 16. I tre settori, invece, si compongono per formare esattamente un cerchio di raggio 1 e quindi la somma delle loro aree è π. Complessivamente, dunque,

$$\text{area}(\sigma(T)) = 16 + \pi.$$

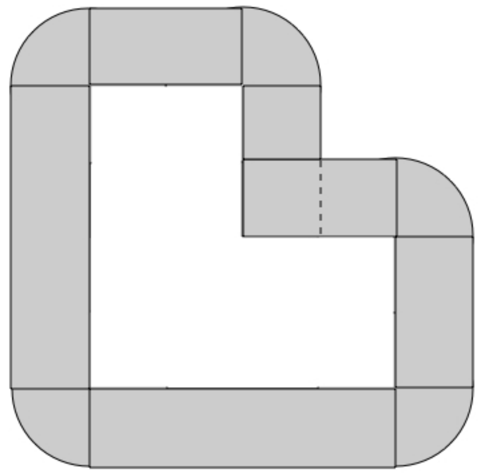


(ii) Osserviamo che il risultato di **(i)** non dipende dalla forma del triangolo T, ma solamente dal suo perimetro. Si può anzi notare che lo stesso risultato si ottiene per ogni poligono convesso con lo stesso perimetro di T, in quanto la somma degli angoli esterni di un poligono convesso è sempre uguale ad un angolo giro.

Per trovare un poligono Q di perimetro 16, tale che area$(\sigma(Q)) <$ area$(\sigma(T))$, dobbiamo dunque cercare tra i poligoni non convessi. Possiamo scegliere un poligono Q a sei lati con la forma di *elle*. Ad esempio prendiamo il poligono Q i cui vertici, in senso antiorario, hanno coordinate:

$$(0,0),\ (4,0),\ (4,2),\ (2,2),\ (2,4),\ (0,4),$$

e che ovviamente ha perimetro uguale a 16. L'insieme $\sigma(Q)$ è formato dall'unione di sei regioni rettangolari di altezza 1 con basi sui rispettivi lati di Q e di 5 settori circolari (manca il settore nell'angolo concavo), di raggio 1 e angolo di 90°. Si osserva però che due dei 6 rettangoli si sovrappongono nel vertice concavo, e quindi l'area dell'unione dei 6 rettangoli è pari a $16 - 1 = 15$.



La somma delle aree dei settori è invece pari a $\frac{5\pi}{4}$. Complessivamente si ha

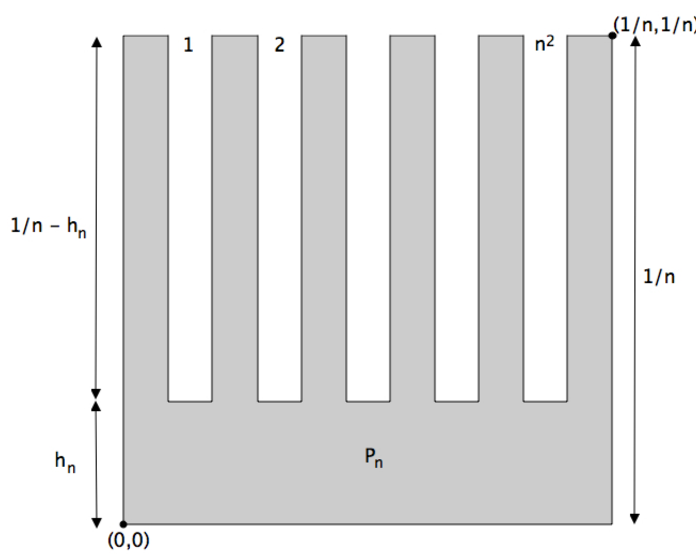
$$\text{area}(\sigma(Q)) = 15 + \frac{5\pi}{4} = \text{area}(\sigma(T)) - 1 + \frac{\pi}{4} < \text{area}(\sigma(T)).$$

(iii) Se vogliamo minimizzare l'area di $\sigma(P)$ nella classe $\mathcal{P}$, dobbiamo trovare un poligono $P \in \mathcal{P}$ in cui la striscia $\sigma(P)$ abbia molte sovrapposizioni. Per ogni intero positivo $n \geq 8$ possiamo costruire un poligono $P_n \in \mathcal{P}$ che sia contenuto in un quadrato di lato $\frac{1}{n}$: ad esempio, posto $h_n = \frac{1}{n} - \frac{8}{n^2} + \frac{2}{n^3}$, si può verificare che la regione poligonale a forma di *pettine*

$$P_n = \left(\left[0, \frac{1}{n}\right] \times [0, h_n]\right) \cup \bigcup_{i=0}^{n^2} \left(\left[\frac{2i}{n(2n^2+1)}, \frac{2i+1}{n(2n^2+1)}\right] \times \left[h_n, \frac{1}{n}\right]\right)$$

per $n \geq 8$ è unione di $n^2 + 2$ rettangoli tutti contenuti nel quadrato $[0, 1/n] \times [0, 1/n]$ ed ha perimetro esattamente 16. Infatti, osservato che P_n ha 3 lati di lunghezza $\frac{1}{n}$, altri $2n^2 + 1$ lati orizzontali lunghi $\frac{1}{n(2n^2+1)}$, e altri $2n^2$ lati verticali lunghi $\frac{1}{n} - h_n$, si ha, per come è definito h_n,

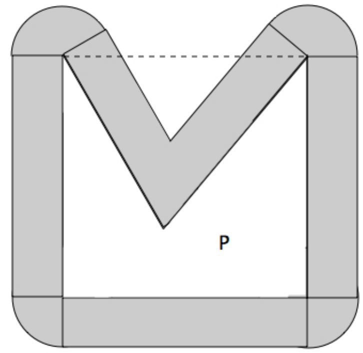
$$\begin{aligned}&\text{perimetro}(P_n) = \\ &\quad = \frac{3}{n} + \frac{1}{n} + 2n^2\left(\frac{1}{n} - h_n\right) = \\ &\quad = \frac{4}{n} + 2n^2\left(\frac{8}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right) = 16.\end{aligned}$$



Dato che P_n è contenuto in un cerchio di raggio $r_n = \sqrt{2}/(2n)$, sicuramente $\sigma(P_n)$ sarà contenuto in un cerchio di raggio $1 + r_n$ e dunque la sua area sarà inferiore a $\pi(1 + r_n)^2$.

Visto che $r_n \to 0$ per $n \to +\infty$, questa quantità tende a π per $n \to +\infty$: ciò dimostra che l'estremo inferiore richiesto al punto (iii) non è superiore a π.

Per provare che l'estremo inferiore non è inferiore a π, bisogna osservare che, qualunque sia il poligono (non vuoto) P, di perimetro arbitrario, l'area di $\sigma(P)$ non può mai essere inferiore a π. Infatti, ciò è vero per ogni poligono convesso P, poiché, per quanto detto prima, l'area di $\sigma(P)$ è data da π + perimetro(P). Se P non è convesso, consideriamo il suo inviluppo convesso P', ossia il minimo insieme convesso che contiene P, e che, come noto, è ancora un poligono. Osserviamo che ogni vertice di P' è anche un vertice di P e nella costruzione di $\sigma(P')$ i settori circolari con centro nei vertici di P' sono interamente contenuti in $\sigma(P)$. Dunque l'area di $\sigma(P)$ è maggiore della somma delle aree dei settori circolari che compongono $\sigma(P')$, la quale è uguale a π. Ne segue la tesi.



Esercizio 4 (i) La funzione f ha un asintoto per $x \to +\infty$ se e solo se

$$\exists m, q \in \mathbb{R} \text{ tali che } \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - q] = 0.$$

Se $m = 0$ l'asintoto è orizzontale, altrimenti è obliquo.

(ii) L'asserzione (a) è falsa: l'esempio contrario è dato da $f(x) = \ln x$, $x > 0$, in cui $f'(x) = \frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$ ma f non ha asintoti.

L'asserzione (b) è falsa, come mostra la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x^3}{x}, \qquad x > 0,$$

che ha l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$, pur avendo derivata prima

$$f'(x) = -\frac{\sin x^3}{x^2} + 3x \cos x^3$$

illimitata sia superiormente che inferiormente per $x \to +\infty$.

L'asserzione (c) è falsa: infatti la funzione $f(x) = -\ln x$, $x > 0$, è convessa in $]0, +\infty[$ e verifica la (1) con $m = 0$, ma non ha asintoti per $x \to +\infty$.

L'asserzione (d), infine, è vera: infatti, se ad esempio $f'(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, allora esiste $M > 1$ tale che $f'(x) > 1$ per ogni $x > M$. Per il teorema di Lagrange, esiste $\xi \in]M, x[$ tale che $f(x) - f(M) = f'(\xi)(x - M)$; ne segue, essendo $f'(\xi) > 1$,

$$f(x) - f(M) = f'(\xi)(x - M) > x - M \qquad \forall x > M,$$

da cui $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Ne deriva, applicando il teorema di de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty.$$

Ciò mostra che f non può avere asintoto obliquo né orizzontale per $x \to +\infty$. Discorso del tutto analogo se si suppone che $f'(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$.