



Università di Pisa - Corso di Specializzazione per il Sostegno

Laboratorio di Matematica

Scuola Secondaria

Leonardo Gnesi

Liceo "G. Marconi" di San Miniato (PI)

leonardo.gnesi@istruzione.it

Marzo – Aprile 2015



La via del cuore

*Le strategie della nostra mente
sono come “taglia-copia-incolla” di Windows*

.....

*La religione dei numeri scritti:
il totem è il valore posizionale e lo zero il suo feticcio.*

.....

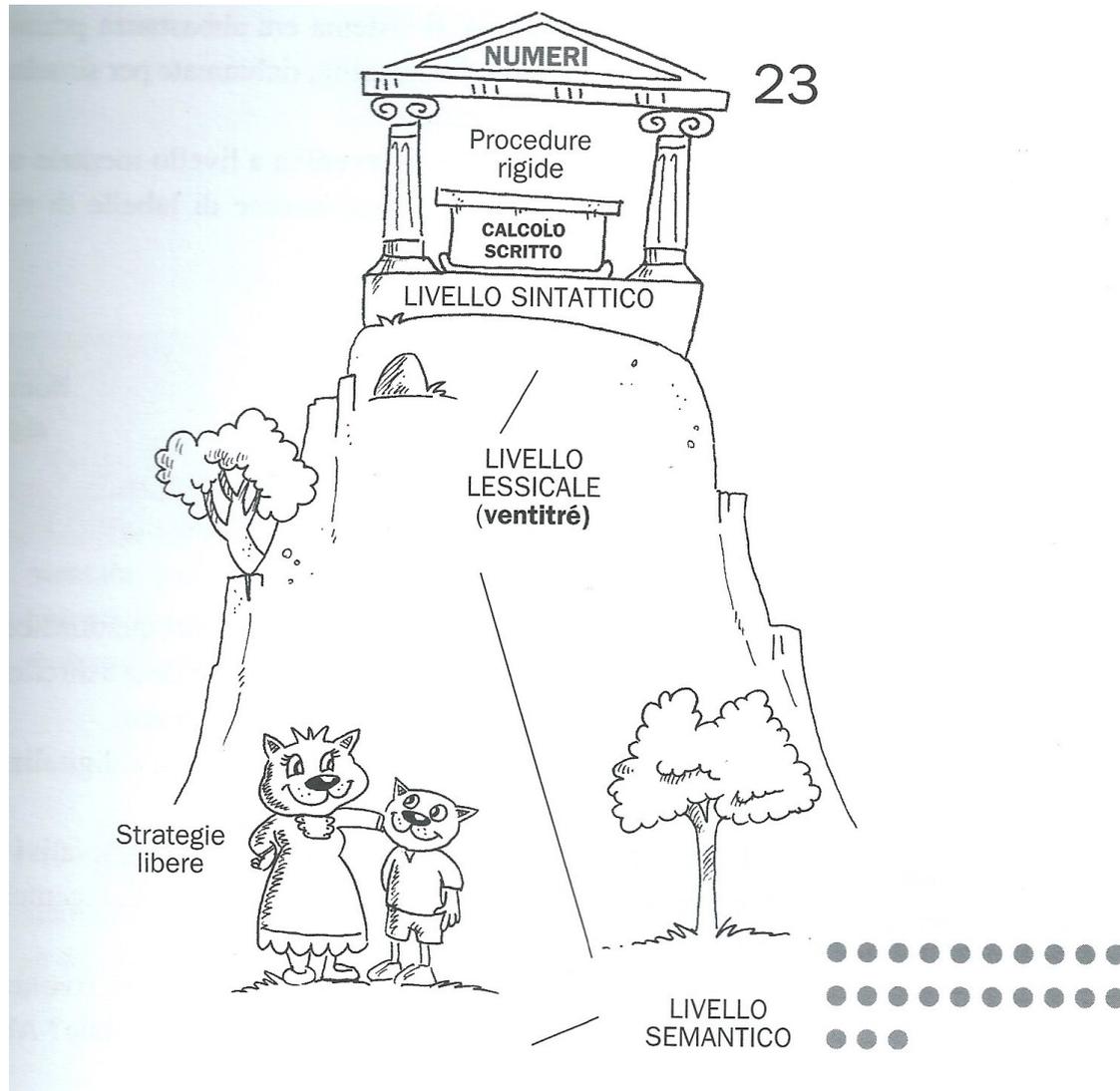
C. Bortolato



Il metodo analogico

- La conquista del concetto di numero passa attraverso vari livelli di significato, di cui quello sintattico (notazione posizionale, tecniche di calcolo) è l' obiettivo finale e non il punto di partenza.
- Questo è un punto in comune con quanto già detto in questo corso.

Il metodo analogico



Il metodo analogico

- A livello **semantico**, il bambino osserva e organizza da solo le rappresentazioni, spinto dalle proprie doti istintive di contabilizzare il mondo e applica strategie intuitive.
- A livello **lessicale**, il bambino utilizza il codice linguistico dei numeri.
- A livello **sintattico**, osserva le regole procedurali rigide.
- Da un livello all' altro si passa mediante un' operazione di **trascodifica**. Tale operazione **non** è reversibile: *se mescolo acqua e farina posso ottenere pane, ma dal pane non posso separare acqua e farina.*

Il metodo analogico

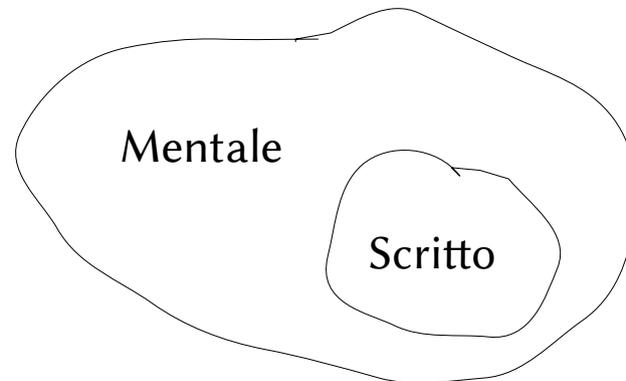
- Il bambino si trova ai piedi della montagna, ma a pensarci bene questa è anche la storia dell'umanità:
 - La notazione romana è parzialmente analogica: l'attenzione è sulle quantità, richiamate per analogia (*es.* III) o per indicazione della lettera iniziale (*es.* MC);
 - La notazione posizionale ha avviato la tecnica del calcolo scritto, ma ha migliorato anche il calcolo mentale?

Il metodo analogico

- Nel calcolo mentale infatti non si seguono tecniche di alto livello, ma componiamo e scomponiamo quantità come ritagli di immagini. Nel calcolo mentale pensiamo la quantità 100 senza pensare il codice composto da tre simboli, e non mettiamo in colonna e non seguiamo le regole di calcolo.
- Nel calcolo scritto utilizziamo procedure rigide con cui segmentare un calcolo in altri più semplici. Incolonniamo, poi dimentichiamo il valore posizionale e agiamo come se le cifre fossero tutte unità. Si giunge alla soluzione come a una scoperta inattesa.

Il metodo analogico

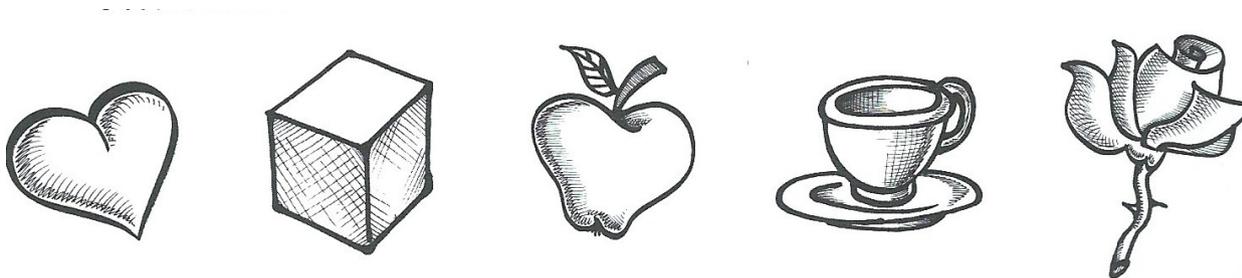
- Per dare significato alle tecniche di calcolo, si introducono le lettere “k, h, da, u”.
- Ma tutto questo sembra innaturale, dal momento in cui il calcolo scritto è un ambito del calcolo mentale



- Come possiamo eseguire i calcoli, altrimenti?

Partendo dai piedi della montagna...

- Strategie intuitive fondate sulla percezione di stima e di approssimazione, e sulla innata capacità di **subitizing** della **numerosità**.
- Come avviene il primo contatto con le quantità:



Partendo dai piedi della montagna...

- L' istinto per il computo di numerosità precede l' identificazione delle cose.



Partendo dai piedi della montagna...

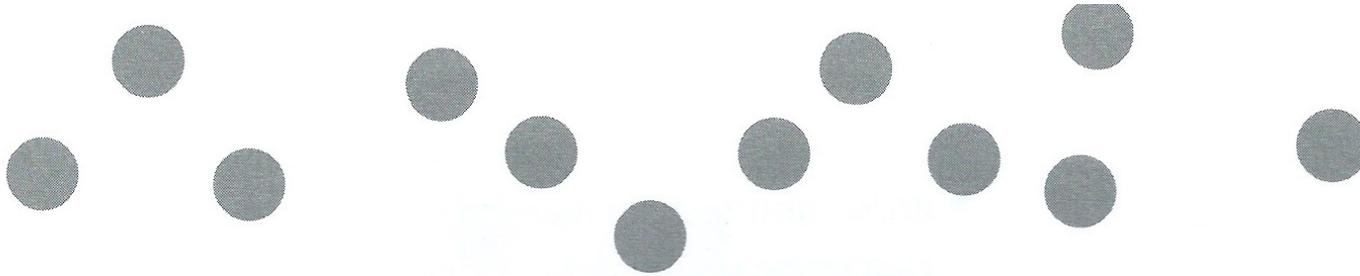
- L' istinto per il computo di numerosità precede l' identificazione delle cose.



- In quale delle due immagini è stato più forte il subitizing?

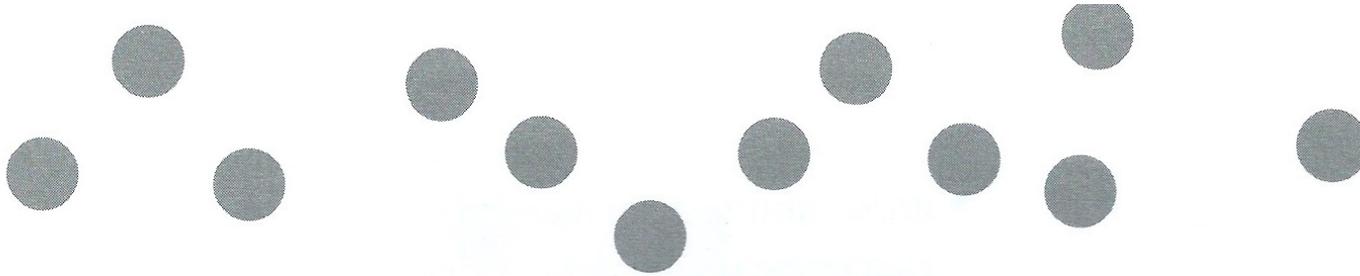
Partendo dai piedi della montagna...

- Queste sono 12 palline. ...

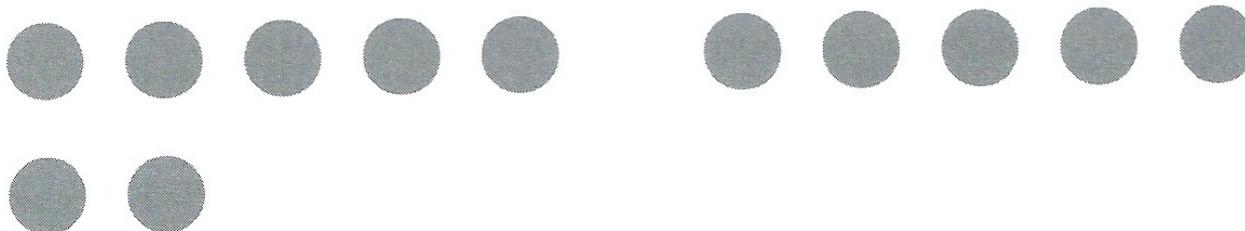


Partendo dai piedi della montagna...

- Queste sono 12 palline. ..



- Anche queste....





Partendo dai piedi della montagna...

- Nella disposizione proposta, la valutazione della numerosità è immediata e tale immagine può essere facilmente richiamata in una memoria di lavoro.



Partendo dai piedi della montagna...

- Tradizionalmente non viene data importanza alla disposizione degli oggetti in un insieme; la mancanza di ordine funziona solo se il bambino ha già le regole di conteggio, se è già in cima alla montagna. La corrispondenza biunivoca non è sufficiente alla nostra mente per visualizzare la numerosità.
- Un altro nodo riguarda il **calcolo mentale**, in cui è impossibile immaginare distintamente più di tre/quattro oggetti per volta e rappresentare una sequenza prolungata di operazioni, come contare un oggetto alla volta. *Per questo si ricorre alle dita...*

Partendo dai piedi della montagna...

- Nel metodo analogico si cerca di superare tali difficoltà con una rappresentazione dotata di un ordinamento precostituito, basato sulla cinquina (*byte*): da..



- a..:



- Lo spazio tra le due serie amplifica il subitizing *In questo piccolo scarto di regolarità, in questa infrazione dell' aspettativa logica sta tutta la differenza tra una didattica capace di sviluppare il calcolo mentale e una didattica sempre condannata alla fase della conta*

Partendo dai piedi della montagna...



Immagine canonica del 6 con lettura da sinistra.



Traslazione in avanti (lettura intuitiva da sinistra).



Traslazione con ribaltamento (lettura intuitiva da destra).



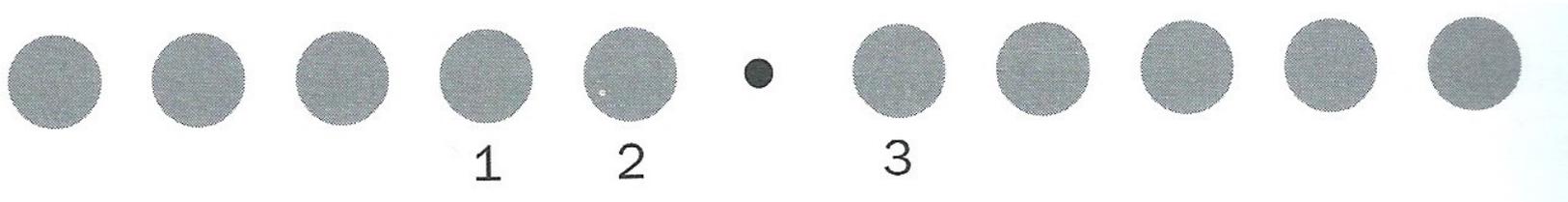
Rappresentazione simmetrica con lettura centrale.



Traslazione in avanti con lettura asimmetrica.

Partendo dai piedi della montagna...

- Le mani sono considerate dei calcolatori analogici:
 - Le dita sono **allineate** *prototipo della linea dei numeri*;
 - Le dita si muovono su/giù *bit*;
 - Le dita sono suddivise in cinque *byte*.
- Per esempio, calcolare $3 + 3$:



Analogico vs. Concettuale

Via Analogica	Via Concettuale
Partenza dalla numerosità	Partenza dai numeri
Spazio analogico	Spazio concettuale
Immagini interne	Immagini esterne
Capacità innate	Capacità acquisite
Comprensione approssimativa	Comprensione lineare
Visualizzazione	Integrazioni verbali
Ignorare le cifre	Considerare le cifre
Utilizzo del codice semantico e lessicale	Utilizzo del sistema posizionale
Trascodificazione finale in cifre arabiche	Trascod. finale in rappresent.semantica
Coerenza psicologica	Coerenza disciplinare
Priorità del calcolo mentale	Priorità del calcolo scritto

Il decalogo del metodo analogico

Decalogo del metodo analogico

1. Limitare il linguaggio verbale
2. Credere al silenzio come strumento per sviluppare l' attenzione
3. Presentare solo i fatti e aspettare le connessioni
4. Privilegiare le simulazioni alle spiegazioni
5. Indicare le cose piuttosto che spiegarle
6. Avere fiducia nella mente che lavora da sola
7. Rinunciare al controllo sui processi di conoscenza
8. Preferire le immagini interne alle immagini esterne
9. Concepire la conoscenza come un allargamento della percezione interiore
10. Pensare all' astrazione come a un allontanamento dal significato

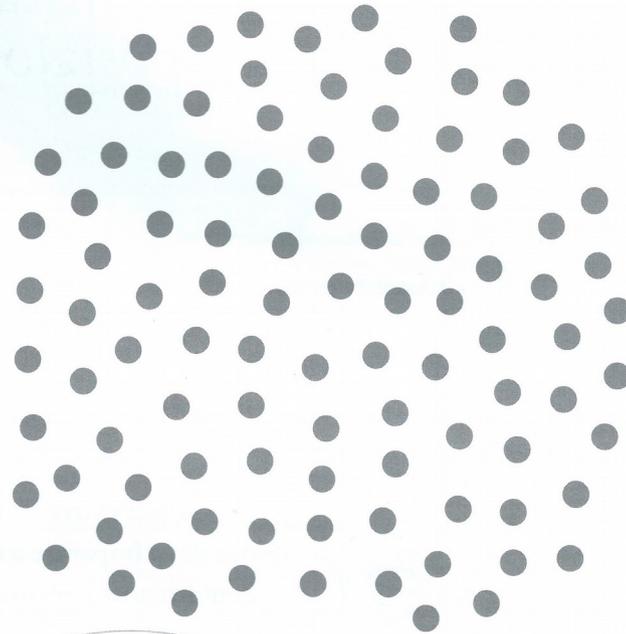


Come funziona in pratica

- 1. Il sistema dei numeri (fino a 1000).

RAPPRESENTAZIONE CONCETTUALE. Se le palline sono dislocate su infiniti assi, non si può chiudere gli occhi e immaginarle.

Queste sono cento palline



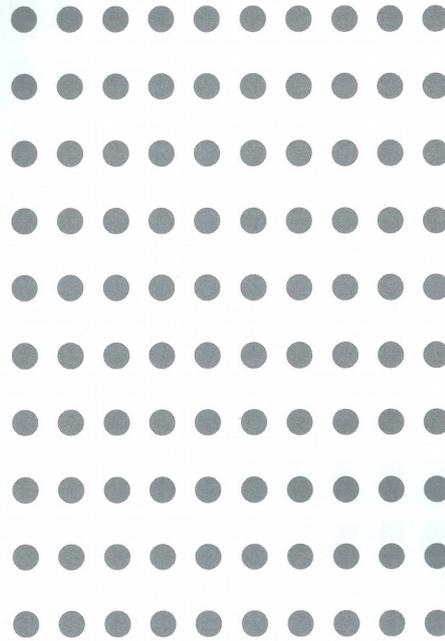
Queste sono
100 palline da contare
una per una.



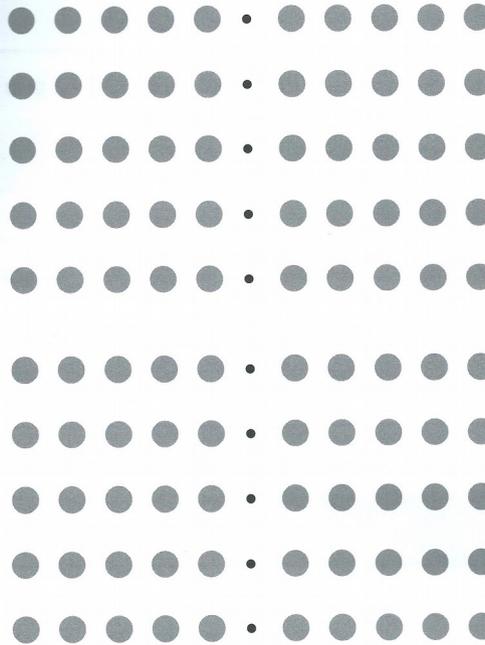
Sono troppe
per contarle
tutte!



Queste sono cento palline ordinate



Osserva il puntino tra 5 e 5



Quel puntino
è per distinguere
5 da 5.



5 e 5
come le dita
delle mani!



1 LETTURA DELLE QUANTITÀ ENTRO IL 10. Alcune di queste immagini sono ribaltate (quantità disposte da destra a sinistra): cambiare direzione di lettura.

Quante palline?

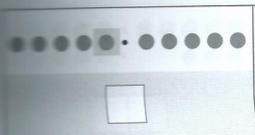
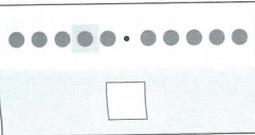
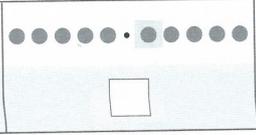
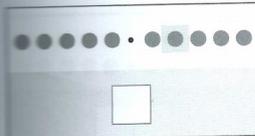
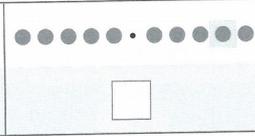
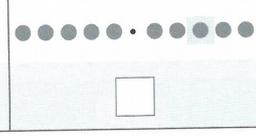
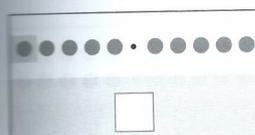
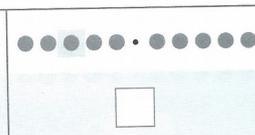
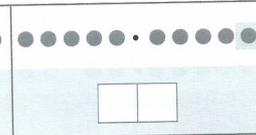
 <input type="text"/>	 <input type="text"/>	 <input type="text"/>
 <input type="text"/>	 <input type="text"/>	 <input type="text"/>
 <input type="text"/>	 <input type="text"/>	 <input type="text"/>

*Ho capito!
In alcuni casi devo iniziare
a leggere da destra!*



LETTURA DELLE POSIZIONI ENTRO IL 10. Esercitarsi a riconoscere la posizione senza contare. Il valore ordinale del numero emerge dalla formulazione linguistica al singolare del termine «pallina» nella domanda.

È la pallina numero?

Qui devo stare attento al linguaggio!



Quante palline?



 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>
 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>
 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/>	 <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>



Quante palline?

Two rows of dot grids. The first row contains five full 10x10 grids. The second row contains three full 10x10 grids followed by a partial grid with 20 dots in the top row and 10 dots in the bottom row.

Scrivi il numero

Two rows of dot grids. The first row contains five full 10x10 grids. The second row contains four full 10x10 grids followed by a partial grid with 20 dots in the top row and 10 dots in the bottom row.

Scrivi il numero

Cerchia i risultati esatti: 720 820 825 900 921 971 725 875



Come funziona in pratica

- 2. Addizioni e sottrazioni

! ADDIZIONI GRADUATE – GRADO 1. I due addendi sono presentati separatamente. Composizione prima delle decine e poi delle unità senza variazione di immagini.

Facile! Prima unisco le decine e poi le unità!



Esegui


 $20 + 20 = \square \square$



 $20 + 11 = \square \square$


 $21 + 21 = \square \square$


 $23 + 23 = \square \square$


 $25 + 23 = \square \square$

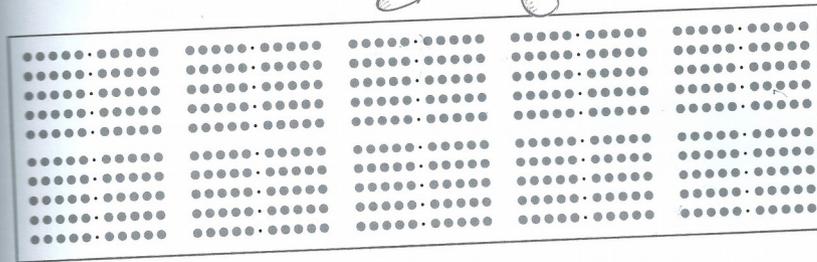

 $25 + 25 = \square \square$

Cerchia i risultati esatti: 31 35 40 42 46 48 50 60 36 70

Esegui orientandoti sulla tabella



Adesso che ho imparato a calcolare, posso andare a divertirmi!



$200 - 15 = 185$

$300 - 40 = 260$

$200 - 29 = 171$

$300 - 95 = 205$

$200 - 140 = 60$

$300 - 190 = 110$

$400 - 90 = 310$

$500 - 300 = 200$

$400 - 190 = 210$

$500 - 150 = 350$

$400 - 301 = 99$

$500 - 450 = 50$

Cerchia i risultati esatti: 50 60 99 110 169 185 171 150
 200 205 210 260 310 350 281 100



Come funziona in pratica

- 3. La tabella del 1000



Come funziona in pratica

- 4. Applicazione del calcolo mentale ai problemi



La linea del 20: simulatore delle mani

- Il primo impulso è giocare con i tasti: si creano combinazioni utilizzando rapporti topologici destra/sinistra, alto/basso, avanti/indietro.
- Nel fare calcoli si svilupperanno altre trasformazioni come traslazione e ribaltamento.
- Il primo utilizzo nei conteggi sarà quello di muovere i tasti uno ad uno. Quando il bambino muove i tasti a cinque o a gruppi, sarà il segnale di una strutturazione del calcolo intuitivo.

La linea del 20: simulatore delle mani

- Con la linea del 20 la multidimensionalità del concetto di numero è resa evidente:
 - cardinalità: ■■■■■■ ■■■□□ *quantità otto*
 - ordinalità: □□□□□ □□■□□ *l'ottavo tasto*
 - ricorsività: per costruzione della linea.

La linea del 20: simulatore delle mani

- Calcoliamo per esempio $7 + 8$:

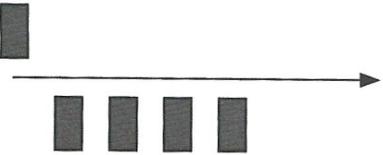
■■■■■ ■■□□□ □□□□□ □□□□□

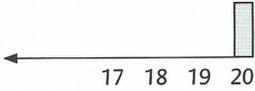
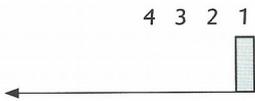
- 7 viene visto come $5 + 2$
- 8 viene visto come $3 + 5$

■■■■■ ■■ ■■■■ ■■■■■ □□□□□

- Il risultato è immediatamente visibile: 15.

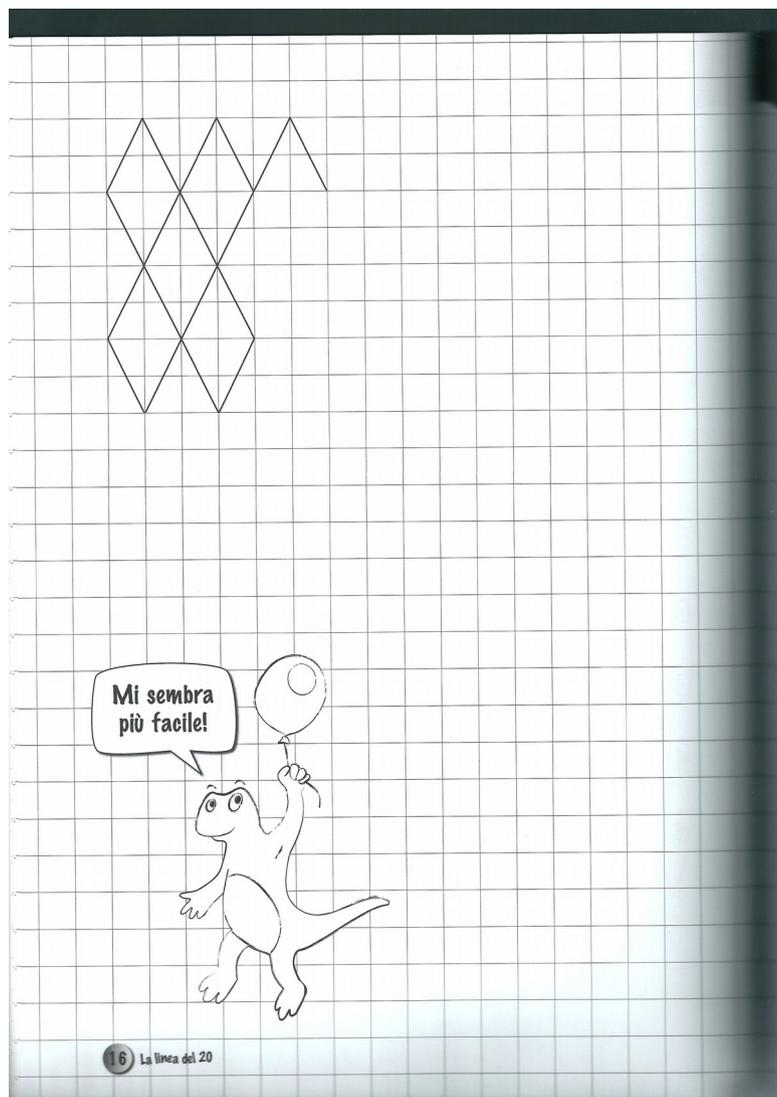
La linea del 20: simulatore delle mani

<p>FASE 1</p> <p>NUMERARE PARTENDO DA SINISTRA</p> 	<p>Partenza a tasti abbassati L'insegnante alza e abbassa i tasti uno a uno partendo da sinistra Gli alunni lo seguono contando con il proprio strumento: uno, due, tre, quattro...</p>								
<p>FASE 2</p> <p>NUMERI CUGINI</p> 	<p>Partenza a tasti abbassati L'insegnante conta alternando un tasto della prima decina e uno della seconda I bambini ripetono:</p> <table data-bbox="968 981 1266 1133"><tbody><tr><td>uno</td><td>undici</td></tr><tr><td>due</td><td>dodici</td></tr><tr><td>tre</td><td>tredici</td></tr><tr><td>quattro</td><td>quattordici</td></tr></tbody></table>	uno	undici	due	dodici	tre	tredici	quattro	quattordici
uno	undici								
due	dodici								
tre	tredici								
quattro	quattordici								

<p>FASE 3</p> <p>NUMERARE ALL'INDIETRO</p> 	<p>Partenza a tasti abbassati L'insegnante alza l'ultimo tasto e inizia una numerazione all'indietro: venti, diciannove, diciotto, diciassette...</p>
<p>FASE 4</p> <p>NUMERARE PARTENDO DA DESTRA</p> 	<p>Partenza a tasti abbassati L'insegnante alza l'ultimo tasto, il ventesimo, e inizia a contare verso sinistra: uno, due, tre, quattro... La nuova numerazione sormonta quella fissa.</p>
<p>FASE 5</p> <p>ALTRE NUMERAZIONI</p>	<p>L'insegnante inizia a sollevare i tasti partendo dal centro o da altre posizioni prese a caso I bambini contano intuendo che esiste una diversa ordinalità a seconda di dove cominciano a contare</p>
<p>FASE 6</p> <p>ORDINALITÀ E CARDINALITÀ</p>	<p>L'insegnante chiede a un alunno: alza il tasto numero 7 (significato ordinale)</p>
<p>FASE 7</p> <p>LETTURA INTUITIVA DELLA QUANTITÀ 5</p>	<p>Obiettivo: esercitare la lettura senza conteggio delle quantità L'insegnante alza cinque tasti consecutivi: quanti sono?</p>
<p>FASE 8</p> <p>LETTURA INTUITIVA DELLA QUANTITÀ 6</p>	<p>L'insegnante alza i primi sei tasti (immagine canonica del 6): quanti sono? Alza ancora 6 tasti nella seconda decina (traslazione): quanti sono? Alza ancora 6 tasti cominciando dal numero 20 (ribaltamento), ecc. Continua a evidenziare la quantità 6 in tutte le soluzioni combinatorie</p>
<p>FASE 9</p> <p>LETTURA INTUITIVA DELLE QUANTITÀ 7, 8, 9</p>	<p>Quanti sono? L'insegnante alza 7 tasti, 8 tasti o 9 tasti componendoli in vari modi sulla linea dei numeri I bambini si esercitano a rispondere nel tempo più breve possibile senza conteggio</p>
<p>FASE 10</p> <p>LETTURA INTUITIVA DI QUANTITÀ SUPERIORI AL 10</p>	<p>Quanti sono? L'insegnante alza quantità superiori al 10, con le stesse modalità precedenti</p>

<p>FASE 11</p> <p>SCOMPOSIZIONE INTUITIVA DEL 10</p>	<p>Obiettivo: incrementare la velocità di riconoscimento dei numeri complementari entro il 10 Partenza a tasti abbassati Alziamo due tasti: quanti tasti mancano?</p>
<p>FASE 12</p> <p>SCOMPOSIZIONE INTUITIVA DEL 20</p>	<p>Obiettivo: incrementare la velocità di riconoscimento dei numeri complementari entro il 20 Alziamo un tasto: quanti ne mancano? Alziamo due tasti: quanti ne mancano?</p>
<p>FASE 13</p> <p>ADDIZIONI ORALI</p>	<p>Svolgiamo la prima addizione muovendo lo strumento e utilizzando il termine «più» al posto di «aggiungi» Partenza a tasti abbassati cinque più cinque più cinque più cinque, uguale venti</p>
<p>FASE 14</p> <p>ADDIZIONI ORALI CON LO STRUMENTO</p>	<p>Ora gli alunni sono in grado di ripetere l'operazione con il proprio strumento cinque più cinque più cinque più cinque uguale venti</p>
<p>FASE 15</p> <p>ADDIZIONI SCRITTE SULLA LAVAGNA</p>	<p>Scriviamo sulla lavagna usando per la prima volta il simbolo scritto dell'addizione $5 + 5 + 5 + 5 = 20$</p>
<p>FASE 16</p> <p>SOTTRAZIONI ORALI</p>	<p>Svolgiamo sulla cattedra la prima sottrazione con lo strumento usando il termine «meno» Partenza a tasti tutti alzati Venti meno cinque uguale quindici</p>
<p>FASE 17</p> <p>SOTTRAZIONI ORALI CON LO STRUMENTO</p>	<p>Gli alunni svolgono la stessa operazione con il loro strumento Venti meno cinque uguale quindici</p>
<p>FASE 18</p> <p>SOTTRAZIONI SCRITTE SULLA LAVAGNA</p>	<p>Svolgiamo la stessa operazione sulla lavagna usando per la prima volta i simboli scritti della sottrazione $20 - 5 = 15$</p>
<p>FASE 19</p> <p>ADDIZIONI A STRUMENTO CHIUSO</p>	<p>Scriviamo alla lavagna: $5 + 5 + 2 =$ Spieghiamo agli alunni che devono risolvere il calcolo guardando lo strumento ma senza toccare i tasti</p>
<p>FASE 20</p> <p>SOTTRAZIONI A STRUMENTO CHIUSO</p>	<p>Scriviamo alla lavagna: $20 - 6 =$ Spieghiamo agli alunni che devono risolvere il calcolo guardando lo strumento ma senza toccare i tasti</p>

Il quaderno della linea del 20



ADD. 7

Ho imparato a non contare, ma a usare strategie.

$4 + 6 =$	$6 + 9 =$
$4 + 11 =$	$6 + 14 =$
$5 + 7 =$	$7 + 8 =$
$5 + 15 =$	$7 + 3 =$
$5 + 8 =$	$8 + 12 =$

La linea del 20 17



Bibliografia incompleta

[1] C. Bortolato “*Calcolare a mente*”, Erickson, Trento (2002)

[2] C. Bortolato “*La linea del 20*”, Erickson, Trento (2005)

[3] C. Bortolato “*Imparare le tabelline*”, Erickson, Trento (1999)