MATEMATICA

ESERCIZIO 1.

Sia V uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbf{R}$ e sia $f : V \to V$.

1. Determinare le condizioni sotto cui una norma su V è indotta da un prodotto scalare.
2. Dimostrare che se f preserva il prodotto scalare, cioè
$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle,$$
allora f è un'isometria lineare.
3. Dimostrare che se f è lineare e soddisfa
$$\forall v, w \in V \quad \langle v, w\rangle = 0 \implies \langle f(v), f(w)\rangle = 0,$$
allora esiste un numero reale $\lambda \in \mathbf{R}$ ed un'isometria lineare $g : V \to V$ tali che $f = \lambda g$.

ESERCIZIO 2.

Considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Dimostrare che la soluzione massimale $y(x)$ esiste ed è unica.
2. Dimostrare che la funzione $y(x)$ è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$.
3. Dimostrare che la funzione $y(x)$ è dispari.
4. Dimostrare che la soluzione $y(x)$ non è definita su tutto $\mathbf{R}$.
5. Determinare ordine e parte principale dell'infinitesimo $y(x)$ per $x \to 0$.
6. Detto x_0 l'estremo destro dell'intervallo di esistenza, determinare una maggiorazione per x_0.
7. Disegnare un grafico approssimativo della soluzione $y(x)$.

ESERCIZIO 3.

Si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}.$$

1. Enunciare il teorema delle funzioni implicite in $\mathbf{R}^n$.
2. Stabilire se l'insieme A è una curva regolare.
3. Trovare i punti dell'insieme A aventi massima e minima ordinata.
4. Disegnare approssimativamente l'insieme A.
5. Calcolare la curvatura di A nei punti di massima ordinata.

ESERCIZIO 4.

1. Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio di grado pari a coefficienti reali, tale che $a_n > 0$ e $a_0 < 0$. Provare che P ha una radice reale positiva.
2. Siano $a, b \in \mathbf{R}$. Dimostrare che le curve reali $X_a = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \; y(xy - 1) - a = 0\}$ e $Y_b = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; (xy - 1)^2 + x^2 - b = 0\}$ hanno intersezione non vuota se e solo se $b > 0$.
3. Calcolare l'immagine dell'applicazione

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (y(xy - 1), (xy - 1)^2 + x^2).$$

4. Determinare un'applicazione $g = (g_1, g_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ con g_1, g_2 polinomi tale che

$$g(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; : \; y = 0, \; x \geq 0\}.$$